Дәріс 6

Тензорлар IV: геодезия және вариациялық принцип

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: гравитациялық өрістегі бөлшектің қозғалыс теңдеуін — геодезиялық сызық теңдеуін — ең кіші әсер принципінен және параллель тасымалдаудан қорыту.

Геодезиялардың қасиеттерін, оларды есептеудің Лагранж тәсілін және сақталу заңдарын қарастыру; жарық сәулелерінің таралу теңдеуі.

Ньютондық шекте геодезия теңдеуінің $\dot{\mathbf{v}} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ теңдеуіне өтетінін және g_{00}-дің гравитациялық потенциалмен байланысын көрсету.

Дәріс жоспары

- Ең кіші әсер принципі
- Геодезия теңдеуі: параллель тасымалдау
- Вариациялық қорыту
- Геодезиялардың қасиеттері
- Мысалдар: жазықтық және сфера
- Лагранж тәсілі, сақталу заңдары
- 4-импульс, Гамильтон–Якоби теңдеуі
- Жарық сәулелері
- Ньютондық шек

Ең кіші әсер принципі

Арнайы салыстырмалылық теориясында еркін бөлшектің қозғалысы ең кіші әсер принципімен анықталады:

$$\delta S = -mc\,\delta \int ds = 0 \qquad (6.1)$$

- Әлемдік сызық берілген екі әлемдік нүкте арасында **экстремалды** болады; жазық кеңістік-уақытта бұл — түзу (бірқалыпты түзу сызықты қозғалыс).
- Гравитациялық өріс — тек метриканың, яғни ds-тың dx^i арқылы өрнегінің өзгерісі. Сондықтан өрістегі қозғалыс та дәл (6.1) принципімен анықталуы тиіс.
- Бөлшек 4-кеңістікте **геодезиялық сызық** бойымен қозғалады. Кеңістік-уақыт галилейлік емес болғандықтан, бұл сызық «түзу» емес, ал нақты кеңістіктегі қозғалыс бірқалыпты да, түзу сызықты да емес.

Неге масса кірмейді?

m — тұрақты көбейткіш, ол вариацияға әсер етпейді: экстремалды сызық массаға тәуелсіз.

Бұл — 1-дәрістегі гравитациялық өрістің негізгі қасиеті: барлық денелер бірдей қозғалады.

Демек, траектория тек кеңістік-уақыттың геометриясымен анықталады.

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$$

Геодезия теңдеуі: параллель тасымалдау арқылы

Галилейлік координаттарда еркін қозғалыс $du^i = 0$, мұндағы $u^i = dx^i/ds$ — 4-жылдамдық. Қисық сызықты координаттарда бұл ковариантты теңдеуге жалпыланады:

$$Du^i = 0 \qquad (6.2)$$

(5.6) бойынша $du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0$; оны ds-қа бөлсек:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \qquad (6.3)$$

- d^2x^i/ds^2 — 4-үдеу, сондықтан $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ шамасын гравитациялық өрістің «4-күші» деп атауға болады.
- g_{ik} — өрістің «потенциалдары», олардың туындылары (Γ) — өрістің «кернеулігі».
- Жергілікті-инерциалдық жүйеде $\Gamma = 0$: нүктеде өріс жоқ, қозғалыс еркін — эквиваленттілік принципі.

Ковариантты компоненттер

$Du_i = 0$ шартынан:

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,il}u^k u^l = 0$$

(5.21)-ні қойғанда екі мүше қысқарады:

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^k u^l = 0$$

Егер g_{kl} қайсыбір x^i-ге тәуелді болмаса, u_i қозғалыс бойында тұрақты.

Вариациялық қорыту

$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ теңдігін вариациялаймыз (g_{ik} координаттар арқылы да өзгереді):

$$2\,ds\,\delta ds = dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + 2g_{ik}dx^i\,d\delta x^k$$

Сондықтан әсердің вариациясы:

$$\delta S = -mc\int\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}u^i u^k \delta x^l + g_{ik}u^i\frac{d\delta x^k}{ds}\right]ds$$

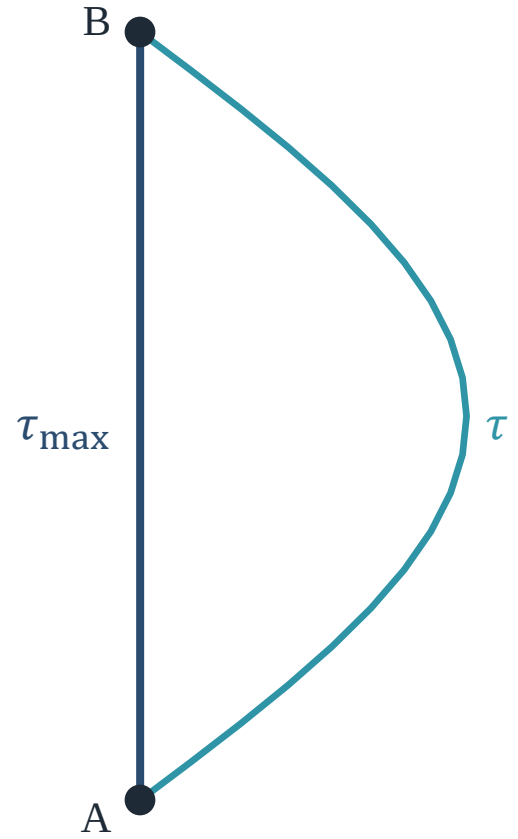
Екінші мүшені бөліктеп интегралдаймыз (шектерде $\delta x^k = 0$), индексті ауыстырып, δx^l алдындағы коэффициентті нөлге теңестіреміз:

$$g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}u^i u^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}u^i u^k = 0$$

Ортаңғы мүшені симметриялап $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)u^i u^k$ түрінде жазсақ, (5.21) бойынша $g_{il}\ddot{x}^i + \Gamma_{l,ik}u^i u^k = 0$. Индексті g^{ml} арқылы көтерсек — дәл (6.3).

Геодезиялардың қасиеттері

- **Жанама вектор өзіне-өзі параллель тасымалданады:** $Du^i = 0$. Бұл «түзудің» табиғи жалпыламасы.
- **Нормалау сақталады:** $g_{ik;l} = 0$ болғандықтан $\frac{d}{ds}\left(g_{ik}u^i u^k\right) = 0$, яғни $u_i u^i = 1$ қозғалыс бойында орындалады.
- **Параметр:** (6.3) түрі тек s-тың сызықты түрлендірулерінде ($s \to as + b$) сақталады — мұндай параметр аффиндік деп аталады.
- **Экстремум түрі:** уақыттық геодезия бойындағы меншікті уақыт берілген оқиғалар арасындағы көршілес уақыттық сызықтармен салыстырғанда **максимал.**



1-сурет. Геодезия (тұтас түзу) және үдемелі әлемдік сызық: геодезия бойындағы меншікті уақыт ең үлкен — «егіздер парадоксы».

Мысал: жазықтықтағы геодезиялар

$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. 5-дәрістегі $\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r$, $\Gamma^\varphi_{r\varphi} = 1/r$ символдарын (6.3)-ке қоямыз (нүкте — l бойынша туынды):

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

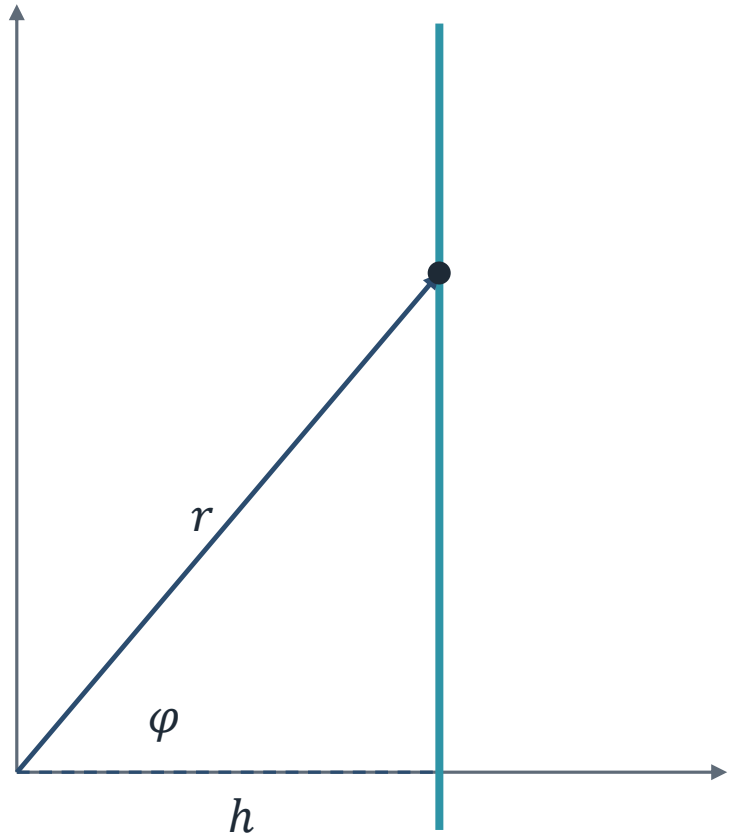
Екінші теңдеу толық туынды: $\frac{d}{dl}(r^2\dot{\varphi}) = 0$, яғни

$$r^2\dot{\varphi} = h = \text{const}$$

$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 1$ нормалауын қолданып, $u = 1/r$ айнымалысына көшсек, $u'' + u = 0$, демек:

$$r\cos(\varphi - \varphi_0) = h$$

Бұл — координаттар басынан h қашықтықтағы түзу: геодезия теңдеуі координаттарға тәуелсіз нәтиже береді.



2-сурет. Полярлық координаттардағы геодезия — түзу.

Мысал: сфера бетіндегі геодезиялар

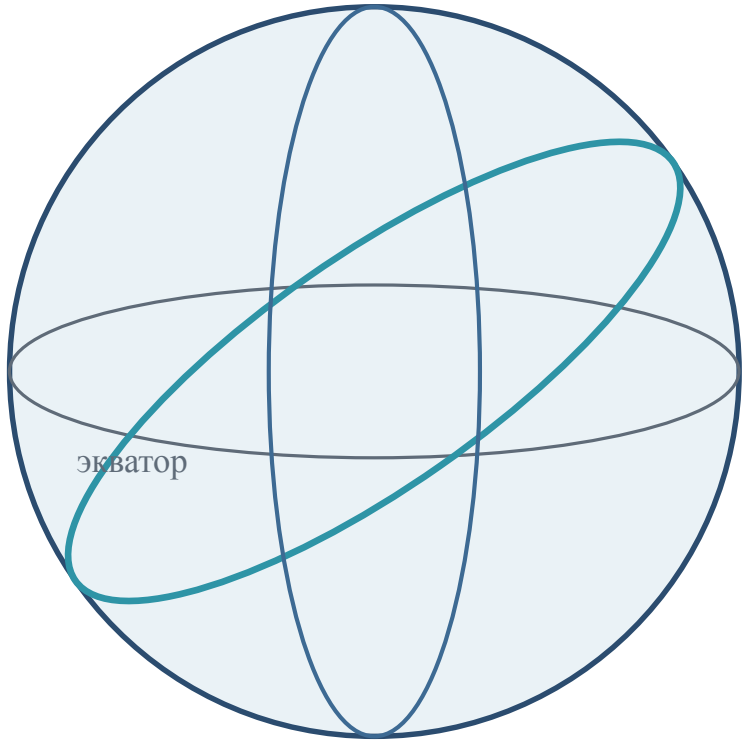
a радиусты сфера: $dl^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$. (5.22) бойынша:

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta$$

Геодезия теңдеулері:

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad \frac{d}{dl}(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}) = 0$$

- Экватор $\theta = \pi/2$, $\dot{\varphi} = \text{const}$ — шешім: $\sin\theta\cos\theta = 0$.
- Меридиандар $\varphi = \text{const}$, $\ddot{\theta} = 0$ — да шешім.
- Сфераның симметриясы бойынша барлық геодезиялар — **үлкен шеңберлер** (центрі сфера центрімен беттесетін шеңберлер).
- Екі нүкте арасында, жалпы алғанда, екі геодезия бар: қысқасы — минимум, ұзыны — тек экстремум.



3-сурет. Сферадағы геодезиялар — үлкен шеңберлер (экватор, меридиан, көлбеу шеңбер).

Лагранж тәсілі және сақталу заңдары

Тәжірибеде геодезия теңдеуін тікелей Γ арқылы емес, «лагранжиан» арқылы алу ыңғайлы ($\dot{x}^i = dx^i/ds$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \;\Leftrightarrow\; (6.3)$$

- Эйлер–Лагранж теңдеулері алдыңғы слайдтағы вариациялық есептеумен бірдей нәтиже береді; Γ символдарын теңдеулердің коэффициенттерінен бірден оқуға болады.
- Егер g_{ik} қайсыбір x^a координатасына тәуелді болмаса (циклдік координата), $u_a = g_{ai}\dot{x}^i$ сақталады.
- Мысалдар: жазықтықта $r^2\dot{\varphi}$ (импульс моменті), сферада $\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$.

Тұрақты өрістегі энергия

Тұрақты өрісте g_{ik} x^0-ге тәуелсіз, сондықтан u_0 сақталады. Энергия $E_0 = mc^2 u_0$. Статикалық өрісте:

$$E_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

v — меншікті уақытпен өлшенген жылдамдық. Әлсіз өрісте:

$$E_0 \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi$$

Циклдік координата	Сақталатын шама	Мағынасы
x^0 (тұрақты өріс)	u_0	$E_0 = mc^2 u_0$ — энергия
φ (жазықтық)	$r^2\varphi$	импульс моменті
φ (сфера)	$\sin^2\theta\dot{\varphi}$	импульс моменті

4-импульс және Гамильтон–Якоби теңдеуі

Гравитациялық өрісте 4-импульс бұрынғыша анықталады:

$$p^i = mcu^i \tag{6.4}$$

$$p_i p^i = g^{ik} p_i p_k = m^2 c^2 \tag{6.5}$$

Әсерді координаттардың функциясы ретінде қарастырсақ, $p_i = -\partial S/\partial x^i$. Оны (6.5)-ке қойып:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0 \tag{6.6}$$

Гравитациялық өрістегі бөлшектің Гамильтон–Якоби теңдеуі. Ол кеплерлік орбиталар мен Меркурий перигелийін есептеуде қолданылады (12–13-дәрістер).

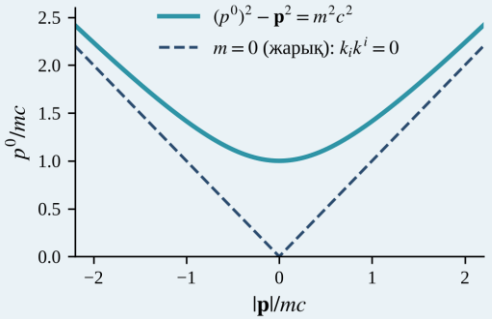
АСТ-мен салыстыру

Галилейлік жүйеде $g^{ik} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\nabla S)^2 = m^2 c^2$$

Бұл — АСТ-дағы еркін бөлшектің белгілі Гамильтон–Якоби теңдеуі.

Гравитацияның барлық әсері g^{ik} арқылы кіреді.



Масса беті: 4-импульстің ұшы гиперболада жатады.

Жарық сәулелерінің таралуы

Жарық үшін $ds = 0$, сондықтан (6.3) теңдеуін қолдануға болмайды. Сәуленің бағыты толқындық вектормен анықталады: $k^i = dx^i/d\lambda$, мұндағы λ — сәуле бойындағы параметр. АСТ-да $dk^i = 0$; гравитациялық өрісте $Dk^i = 0$:

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 \qquad (6.7)$$

$$k_i k^i = 0 \qquad (6.8)$$

$k_i = \partial\psi/\partial x^i$ қойсақ (ψ — эйконал), эйконал теңдеуі:

$$g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0 \qquad (6.9)$$

(6.6)-мен салыстырыңыз: $m = 0$ шегі.

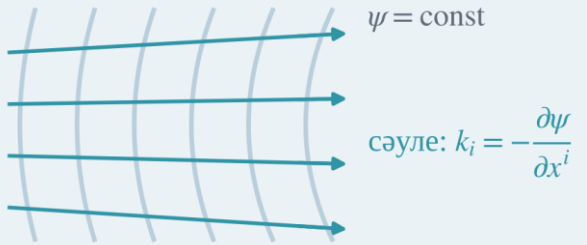
Нөлдік геодезиялар

Жарық сәулелері — ұзындығы нөлге тең геодезиялар (изотропты геодезиялар).

Олар да параллель тасымалдау арқылы анықталады, бірақ s орнына аффиндік λ параметр қолданылады.

Гравитациялық өрісте сәулелер қисаяды — жарықтың Күн маңында ауытқуы (13-дәріс).

Тұрақты өрісте $\omega_0 = -c\,\partial\psi/\partial x^0$ жиілігі сәуле бойында сақталады — қызыл ығысудың негізі.



Ньютондық шек

Аз жылдамдықтар және әлсіз статикалық өріс: $ds \approx c\,dt$, $|dx^\alpha/ds| \ll dx^0/ds \approx 1$. (6.3)-те тек Γ^α_{00} мүшесі қалады:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} \approx -c^2\Gamma^\alpha_{00}, \qquad \Gamma^\alpha_{00} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}$$

Ньютон теңдеуімен $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\varphi$ салыстырсақ:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \qquad (6.12)$$

- Бұл 1-дәрістегі нәтижемен сәйкес келеді: ол жерде g_{00} Лагранж функциясы $L = -mc^2 + mv^2/2 - m\varphi$ (6.10) арқылы табылған.
- Ньютондық шекте гравитацияны тек g_{00} анықтайды; $g_{\alpha\beta}$-ға түзетулер де сол ретті, бірақ қозғалыс теңдеуіне v^2/c^2 көбейткішімен кіреді.

Кристоффель символын есептеу

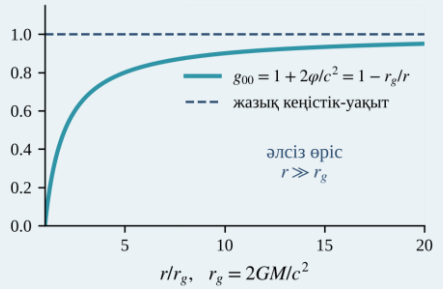
Статикалық өрісте (5.) бойынша:

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta}$$

Әлсіз өрісте $g^{\alpha\beta} \approx -\delta^{\alpha\beta}$, сондықтан $\Gamma^\alpha_{00} \approx \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{00}$.

Сонда:

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$$



Сапалық сурет: Ньютон шегі $r \gg r_g$ аймағында орындалады.

Қорытынды

- Гравитациялық өрістегі бөлшек геодезия бойымен қозғалады: $\delta \int ds = 0$, траектория массаға тәуелсіз.
- Геодезия теңдеуі $\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l = 0$ параллель тасымалдаудан да, вариациялық принциптен де шығады.
- Геодезия бойында жанама вектор параллель тасымалданады, $u_i u^i = 1$ сақталады; уақыттық геодезияда меншікті уақыт максимал.
- Лагранж тәсілі: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k$; циклдік координатаға сақталатын шама сәйкес келеді.
- Жарық — нөлдік геодезиялар: $Dk^i = 0$, $k_i k^i = 0$.
- Ньютондық шек: $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$.

Негізгі формулалар

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2$$

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl}k^k k^l = 0$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Келесі дәріс: қисықтық I — Риман тензорының идеясы, параллель тасымалдау.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.