Дәріс 7

Қисықтық I: Риман тензорының идеясы, параллель тасымалдау

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: кеңістік-уақыттың қисықтығын координаттарға тәуелсіз түрде сипаттайтын тензорды — Риман қисықтық тензорын — векторды тұйық контур бойымен параллель тасымалдау арқылы енгізу.

Риман тензорының Кристоффель символдары арқылы өрнегін қорыту; оның ковариантты туындылардың коммутаторымен байланысы; кеңістіктің жазықтық критерийі.

Геодезиялық ауытқу теңдеуі: қисықтықтың физикалық мағынасы — тасқындық (приливтік) күштер.

Дәріс жоспары

- Геодезия бойымен параллель тасымалдау
- Жолға тәуелділік: сфера мысалы
- Шексіз аз тұйық контур
- Риман тензоры
- Ковариантты туындылардың коммутаторы
- Жазықтық критерийі
- Мысал: жазықтық және сфера
- Геодезиялық ауытқу
- Қисықтық және гравитация

Геодезия бойымен параллель тасымалдау

- Майысқан кеңістікте шексіз аз параллель тасымалдау — берілген шексіз аз аймақта галилейлік болатын координаттарда компоненттер өзгермейтін тасымалдау.
- Егер $x^i = x^i(s)$ — геодезия, онда $u^i = dx^i/ds$ жанама векторы үшін $Du^i = 0$: **жанама вектор геодезия бойымен өзіне-өзі параллель тасымалданады.**
- Параллель тасымалдауда екі вектордың скаляр көбейтіндісі, демек олардың арасындағы «бұрыш» өзгермейді.
- Сондықтан кез келген векторды геодезия бойымен тасымалдағанда оның геодезиямен жасайтын бұрышы тұрақты қалады — бұл тасымалдауды іс жүзінде құрудың қарапайым ережесі.

Математикалық тұжырым

Кез келген қисық бойымен тасымалдау:

$$\frac{DA^i}{ds} = \frac{dA^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} A^k u^l = 0$$

Скаляр көбейтіндінің сақталуы $g_{ik;l} = 0$-ден:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ik} A^i B^k\right) = 0$$

Жазық кеңістікте тасымалдау жолға тәуелсіз; қисық кеңістікте — тәуелді.



$\alpha = \text{const}$ геодезия бойымен

Геодезия бойымен тасымалдағанда вектор мен жанама арасындағы бұрыш сақталады.

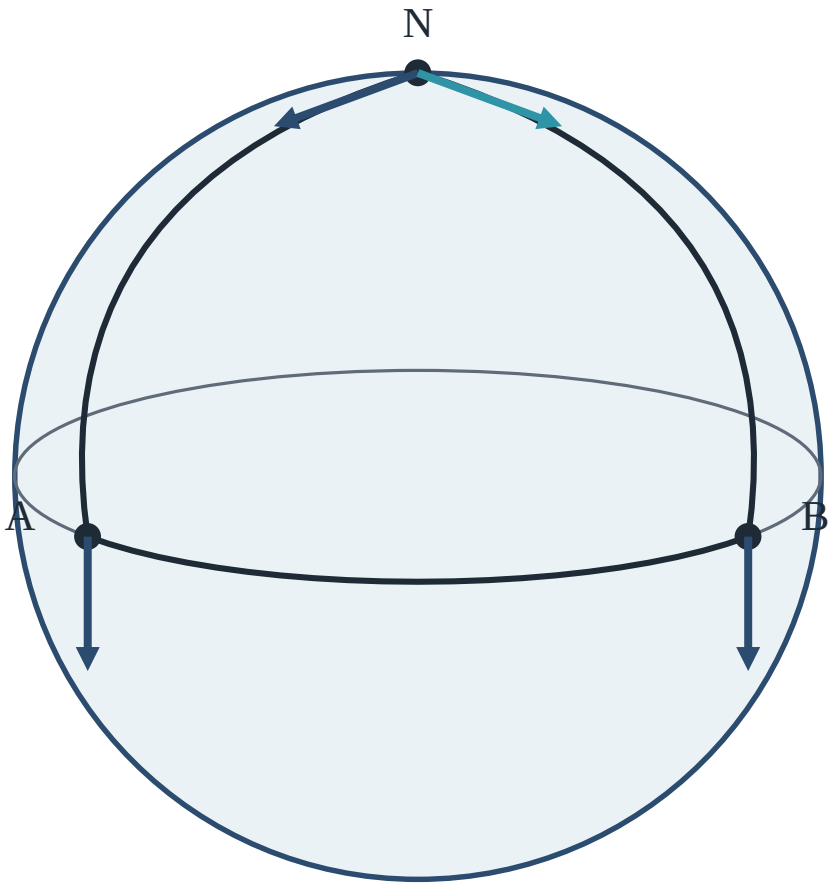
Жолға тәуелділік: сфера мысалы

Сфера бетінде үш геодезиямен (үлкен шеңбер доғаларымен) шектелген үшбұрыш алайық: солтүстік полюс N және экватордағы A, B нүктелері, $\angle ANB = 90°$.

- N-де NA меридианы бойымен бағытталған векторды аламыз. NA бойымен тасымалдағанда ол меридианға жанама қалып, A-да «оңтүстікке» қарайды.
- AB экваторы бойымен бұрыш (90°) сақталады: B-да да «оңтүстікке».
- BN меридианы бойымен N-ге оралғанда вектор NB бағытында — бастапқы бағыттан 90°-қа бұрылған.

$$\alpha = \frac{S}{a^2} = \frac{\pi a^2/2}{a^2} = \frac{\pi}{2}$$

Бұрылу бұрышы контур қоршаған ауданға және қисықтыққа $K = 1/a^2$ пропорционал.



1-сурет. Геодезиялық үшбұрыш бойымен тасымалданған вектор N-ге 90°-қа бұрылып оралады.

Шексіз аз тұйық контур бойымен тасымалдау

Ковариантты векторды шексіз аз тұйық контур бойымен тасымалдағандағы өзгерісі (81.5) бойынша:

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i \, dx^l \qquad (7.1)$$

Контур ішіндегі A_i мәндері бір мәнді емес (жолға тәуелді), бірақ бұл екінші ретті аз шама. Сондықтан бірінші ретке дейінгі дәлдікпен туындыларды контурдағы параллель тасымалдау шартынан аламыз:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n \qquad (7.2)$$

Енді (7.1) интегралына Стокс теоремасын қолданамыз; контур қоршаған беттің ауданы — шексіз аз Δf^{lm} тензоры.

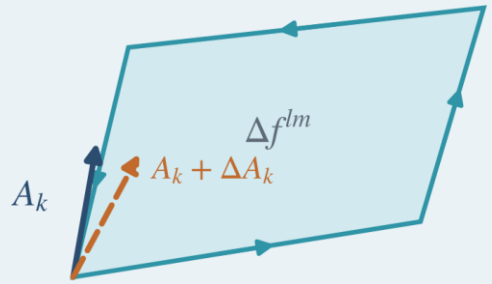
Стокс теоремасы (4 өлшем)

Кез келген B_l векторы үшін:

$$\oint B_l \, dx^l = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial B_m}{\partial x^l} - \frac{\partial B_l}{\partial x^m} \right) df^{lm}$$

Мұнда $B_l = \Gamma^i_{kl} A_i$. Шексіз аз контур үшін интеграл астындағы өрнекті тұрақты деп, $df^{lm} \to \Delta f^{lm}$ аламыз.

Туындыларды есептегенде $\partial A_i / \partial x^l$ (7.2) бойынша алмастырылады.



Тұйық контурды айналып шыққанда вектор Δ_k шамасына өзгереді.

Риман қисықтық тензоры

Есептеулер нәтижесінде:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i{}_{klm} A_i \, \Delta f^{lm} \qquad (7.3)$$

мұндағы 4 рангілі тензор:

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} \qquad (7.4)$$

- $R^i{}_{klm}$-ның тензор екені (7.3)-тен көрінеді: сол жақта бір нүктедегі векторлардың айырмасы ΔA_k — вектор, ал A_i мен Δf^{lm} кез келген.
- Оны **қисықтық тензоры** немесе **Риман тензоры** деп атайды.
- Контравариантты вектор үшін ($\delta(A^k B_k) = 0$ шартынан):

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k{}_{ilm} A^i \, \Delta f^{lm} \qquad (7.5)$$

Құрылымы

Риман тензоры Кристоффель символдарының **бірінші туындылары** мен **квадраттарынан** тұрады.

Демек ол g_{ik}-ның **екінші** туындыларын қамтиды.

Индекстер l, m бойынша антисимметриялы:

$$R^i{}_{klm} = -R^i{}_{kml}$$

Бұл Δf^{lm}-нің антисимметриясымен сәйкес. Басқа симметриялар — 8-дәрісте.

Ковариантты туындылардың коммутаторы

Жай туындылардан айырмашылығы, екі рет ковариантты дифференциалдаудың нәтижесі дифференциалдау ретіне тәуелді. Айырма дәл қисықтық тензорымен анықталады:

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl} \tag{7.6}$$

$$A^i_{\ ;k;l} - A^i_{\ ;l;k} = -A^m R^i_{\ mkl} \tag{7.7}$$

Тензорлар үшін әр индекске бір мүше:

$$A_{ik;l;m} - A_{ik;m;l} = A_{in} R^n_{klm} + A_{nk} R^n_{ilm} \tag{7.8}$$

Бұл формулалар Риман тензорының ең ықшам анықтамасы ретінде жиі қолданылады: қисықтық — «ковариантты туындылардың коммутативті еместігі».

(7.6)-ны тексеру

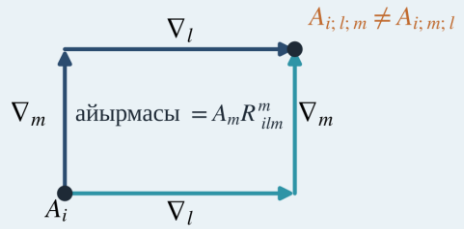
Нүктеде жергілікті-геодезиялық жүйені аламыз ($\Gamma = 0$, бірақ $\partial\Gamma \neq 0$):

$$A_{i;k;l} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - A_m \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l}$$

Ретін ауыстырып, азайтсақ:

$$A_m \left(\frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l} \right) = A_m R^m_{ikl}$$

Бұл нүктеде (7.4)-пен сәйкес; тензорлық теңдік болғандықтан, барлық жүйеде орындалады.



Ковариантты туындылардың реті маңызды: айырмасы — Риман тензоры.

Кеңістіктің жазықтық критерийі

- **Жазық кеңістікте** $R^i_{klm} = 0$. Мұнда барлық жерде $\Gamma = 0$ болатын координаттар бар, сондықтан $R = 0$; тензор болғандықтан — кез келген жүйеде. Параллель тасымалдау бір мәнді, тұйық контурда вектор өзгермейді.
- **Кері теорема:** $R^i_{klm} = 0$ болса, **кеңістік жазық**. Бір аймақта галилейлік жүйені таңдап, оны бір мәнді параллель тасымалдау арқылы бүкіл кеңістікке таратуға болады.
- **Қисық кеңістікте** нүктеде жергілікті-геодезиялық жүйені таңдауға болса да, R сол нүктеде нөлге айналмайды: Γ-мен бірге олардың туындылары нөлге айналмайды.
- Сонымен, R^i_{klm} — 1-дәрістегі «нағыз» гравитациялық өрісті инерция өрістерінен ажырататын координаттарға тәуелсіз критерий.

R^{i_lm} **= 0 барлық жерде**	⇔	Кеңістік жазық: бүкіл кеңістікте $\Gamma = 0$ болатын жүйе бар
$R^{i_lm} \neq 0$	⇔	Кеңістік қисық: өрісті тек нүктеде жоюға болады

Еске түсіру: 1-дәріс

Инерциалды емес жүйелерге эквивалентті өрістерді координаттарды түрлендіріп бүкіл кеңістікте жоюға болады: $R = 0$.

«Нағыз» гравитациялық өрісті жою мүмкін емес: $R \neq 0$.

$$R^i_{klm} = 0 \Leftrightarrow \textit{жазық}$$

Айналмалы жүйе мен сфералық координаттардағы Минковский кеңістігі үшін g_{ik} күрделі, бірақ $R = 0$.

Мысал: жазықтық және сфера

Жазықтық (полярлық координаттар):

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}$$

$$R^{r}_{\varphi r\varphi} = \frac{\partial \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = -1 - (-r)\frac{1}{r} = 0$$

Метрика координаттарға тәуелді, бірақ қисықтық жоқ — жазықтық шынында жазық.

Сфера (a радиусты):

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta$$

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \frac{\partial \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = -\cos 2\theta + \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

Сфераның қисықтығы нөлге тең емес; оны координаттарды таңдау арқылы жою мүмкін емес.

$$K = \frac{R_{\theta\varphi\theta\varphi}}{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} = \frac{a^2\sin^2\theta}{a^4\sin^2\theta} = \frac{1}{a^2}$$

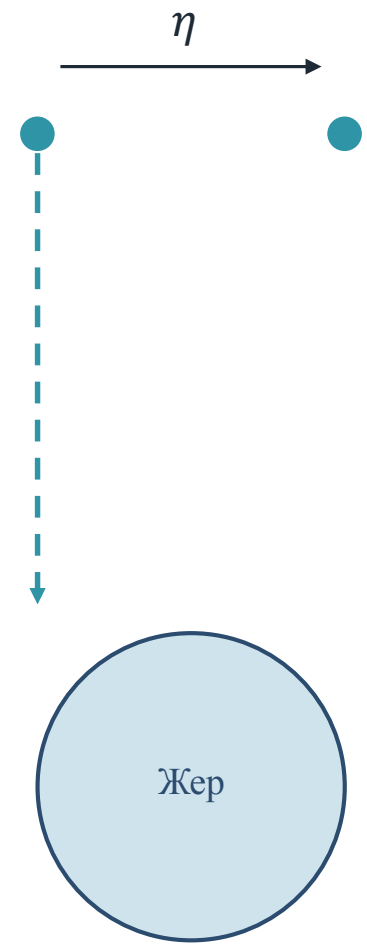
Екіөлшемді бетте Риман тензорының бір ғана тәуелсіз компоненті бар — гаусстық қисықтық K. 4-слайдтағы бұрылу бұрышы $\alpha = KS$.

Геодезиялық ауытқу

Шексіз жақын екі геодезия бойымен қозғалатын бөлшектерді қарастырайық. η^i — бірдей s мәніндегі нүктелерді қосатын шексіз аз 4-вектор. (7.7)-ні пайдаланып, оның салыстырмалы 4-үдеуін табамыз:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i{}_{klm}u^k u^l \eta^m$$

- Бұл — **геодезиялық ауытқу теңдеуі** (1-есеп).
- Жазық кеңістік-уақытта $R = 0$: көршілес еркін бөлшектердің салыстырмалы үдеуі жоқ.
- Қисық кеңістік-уақытта көршілес бөлшектер жақындайды немесе алыстайды — бұл **тасқындық (приливтік) күштер**. Оларды координаттар таңдау арқылы жою мүмкін емес.
- Ньютондық аналогы: $\ddot{\eta}^\alpha = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\eta^\beta$.



2-сурет. Жерге еркін түскен екі дене бір-біріне жақындайды: тасқындық әсер қисықтықтың көрінісі.

Қисықтық және гравитация

Гравитациялық өрісті сипаттайтын шамалардың иерархиясын енді толық жаза аламыз — олар g_{ik}-ның туындыларының ретімен ерекшеленеді:

Шама	Не сипаттайды	Нүктеде жоюға бола ма?
g_{ik}	өріс «потенциалдары», уақыт пен қашықтық	галилейлік түрге келтіруге болады
$\Gamma^i_{kl} \sim \partial g$	өріс «кернеулігі», еркін түсу үдеуі	иә — эквиваленттілік принципі
$R^i{}_{klm} \sim \partial^2 g,\ \Gamma^2$	қисықтық, тасқындық күштер	жоқ — тензор

Гравитациялық өріс теңдеулері (Эйнштейн теңдеулері) қисықтықты материямен байланыстыруы тиіс — сондықтан олар g_{ik} бойынша екінші ретті болады (8–9-дәрістер).

Қорытынды

- Геодезия бойымен тасымалдағанда вектордың геодезиямен бұрышы сақталады; жанама вектор өзіне-өзі параллель.
- Қисық кеңістікте параллель тасымалдау жолға тәуелді: тұйық контурдан кейін вектор бұрылады.
- Шексіз аз контур үшін $\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i{}_{klm} A_i \Delta f^{lm}$; $R^i{}_{klm}$ — Риман тензоры.
- Ковариантты туындылардың коммутаторы қисықтық тензорымен анықталады.
- $R^i{}_{klm} = 0 \Leftrightarrow$ кеңістік жазық; қисықтықты координаттар таңдау арқылы жою мүмкін емес.
- Геодезиялық ауытқу: $D^2\eta^i/ds^2 = R^i{}_{klm} u^k u^l \eta^m$ — тасқындық күштер.

Негізгі формулалар

$$R^i{}_{klm} = \partial_l \Gamma^i_{km} - \partial_m \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}$$

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i{}_{klm} u^k u^l \eta^m$$

Келесі дәріс: қисықтық II — Риман/Риччи/скаляр қисықтық, Бьянки тепе-теңдігі, Эйнштейн тензоры.



Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.