ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Дәріс 5

Адиабаталық теория шеңберінде постньютондық жуықтаудағы сынақ денелерінің қозғалысы

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: адиабаталық теорияның негізгі идеялары мен физикалық аспектілерін баяндау және айналатын объектінің гравитациялық өрісіндегі сынақ денелерінің қозғалысына қолдану.

Адиабаталық теория жүйенің лагранждық немесе гамильтондық сипаттамасын ұйытқытып, кейбір параметрлердің баяу өзгеруіне мүмкіндік беру идеясына негізделген.

Ол өріс немесе қозғалыс теңдеулерін нақты шешпей-ақ физикалық құбылыстарды талдаудың баламалы әдісі.

Дәріс жоспары

- Постньютондық гравитация
- Айналатын объектілер: тарихи шолу
- Ұйытқыған Кеплер есебі
- Векторлық элементтер $\vec{M}, \vec{A}$
- Қозғалыс теңдеулерінің жалпы түрі
- Айналатын сынақ денесі
- Адиабаталық инвариант M_0
- Адиабаталық теорияның негізгі теңдеулері
- Санақ жүйелері, Эйлер бұрыштары

Постньютондық гравитация және адиабаталық теория

Постньютондық жуықтау

Ньютон физикасына сәйкес келетін гравитациялық теңдеулердің жеңілдетілген түрі: $\sim 1/c^2$ ретті релятивистік түзетулер ескеріледі.

Адиабаталық теория

Термодинамика, химия, классикалық және кванттық механикада қолданылады. Негізі — баяу өзгеретін параметрлер мен адиабаталық инварианттар.

Адиабаталық теорияның үш тірегі

Орбиталардың векторлық элементтері → Сызықты емес тербелістер теориясының асимптотикалық әдістері → Адиабаталық инварианттар

Абдилдин М.М. бұл тәсілді Фок метрикасы негізінде дамытып [1, 4], қозғалыс теңдеулерінің түрін күрт жеңілдетті.

Айналатын объектілердің өрісі: тарихи шолу

Бақылаулар бойынша барлық массивтік әрі ықшам астрофизикалық нысандар айналады. Олардың өрісіндегі қозғалысты зерттеу күшті өрістегі релятивистік әсерлерді тексеруге және кеңістік-уақыт құрылымын зерттеуге мүмкіндік береді.

1916
Шварцшильд → 1918
Лензе–Тирринг → 1963
Керр → 1968
Эрнст

Шварцшильд [5]

Статикалық, сфералық симметриялы вакуумдық шешім; Ньютон теориясында жоқ жаңа әсерлер.

Лензе–Тирринг [7, 8]

Бұрыштық моменттің бірінші ретін ескеретін сыртқы шешім; координаталық торды тарту (frame dragging).

Керр [10]

Стационар, осьтік симметриялы, асимптотикалық тегіс нақты шешім: айналатын қара құрдымдар.

Эрнст [12]

Комплекс потенциал арқылы жаңа шешімдер алу әдісі; Керр шешімі — ең қарапайым жағдай.

Ұйытқыған Кеплер есебі

Орталық өрісте қозғалатын релятивистік бөлшек үшін ұйытқыған Лагранж функциясы:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{Gmm_0}{r} + \frac{1}{c^2}F(\vec{r},\vec{v}) \quad (1)$$

F — ұйытқу функциясы. Сәйкес Гамильтон функциясы:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{Gmm_0}{r} - \frac{1}{c^2}F(\vec{r},\vec{p}) \quad (2)$$

мұндағы сынақ денесінің импульсі:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$$

Идея

Ньютондық Кеплер есебі — нөлдік жуықтау; оның шешімі белгілі.

$1/c^2$ ретті ұйытқу орбитаны бұзбайды, тек оның элементтерін **баяу** өзгертеді.

Сондықтан ұйытқыған қозғалысты баяу эволюцияланатын Кеплер эллипсі ретінде сипаттауға болады.

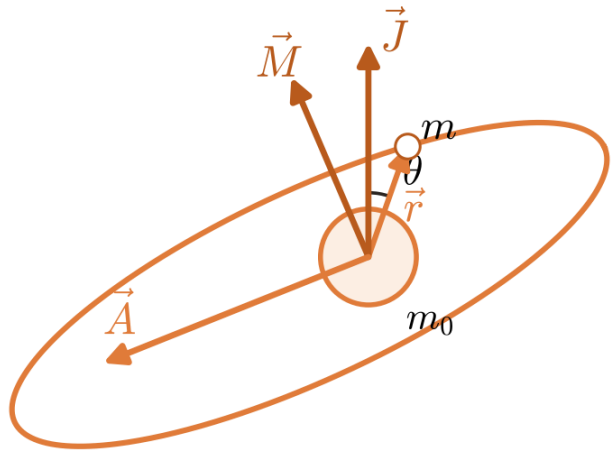
Орбитаның векторлық элементтері

Қозғалысты қозғалыс интегралдары — импульс моменті $\vec{M}$ және Лаплас векторы $\vec{A}$ арқылы сипаттаймыз:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}\,] \tag{3}$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \frac{Gm_0 m}{r}\vec{r} \tag{4}$$

- $A = Gm_0 me$ — Лаплас векторының шамасы, e — эксцентриситет;
- $\vec{M}$ орбита жазықтығына перпендикуляр;
- $\vec{A}$ орбитаның перигелийіне бағытталған;
- бірге олар орбитаның кеңістіктегі пішіні мен орнын толық анықтайды.



Орталық дене ($\vec{J}$) және сынақ денесінің векторлық элементтері; θ — $\vec{J}$ мен $\vec{r}$ арасындағы полярлық бұрыш

Қозғалыс теңдеулерінің жалпы түрі

Векторлық элементтер үшін қозғалыс теңдеулері:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + [\vec{\Omega}, \vec{M}] \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\vec{e}_A + [\vec{\Omega}, \vec{A}] \quad (6)$$

- $\vec{e}_M$, $\vec{e}_A$ — $\vec{M}$ және $\vec{A}$ бойымен бағытталған бірлік векторлар;
- бірінші мүше — вектордың **шамасының** өзгеруі;
- екінші мүше — эллипстің «жалпы» айналуы: $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдығымен вектордың **бағытының** өзгеруі.

Физикалық көрініс

Орбита баяу деформацияланатын әрі баяу айналатын эллипс ретінде қарастырылады.

Барлық релятивистік эффектілер — перигелийдің ығысуы, орбита жазықтығының прецессиясы — $\vec{\Omega}$ арқылы өрнектеледі.

Айналатын орталық дене өрісіндегі айналатын сынақ денесі

Екі айналатын дене есебі Фоктың бірінші жуықтау метрикасы негізінде қарастырылды. $m \ll m_0$ шекті жағдайында (5)–(6)-ның айқын түрі:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{MS_x\omega_y\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2aPm^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\vec{M} + \left[\vec{\Omega},\vec{M}\right] \tag{7}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{MS_y\omega_x\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2a^2m^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\vec{A} + \left[\vec{\Omega},\vec{A}\right] \tag{8}$$

Белгі	Мағынасы	Белгі	Мағынасы
$S_x = I\omega_x$, $S_\gamma = I\omega_\gamma$	сынақ денесінің меншікті моменті	I	инерция моменті
ω_x, ω_γ	бұрыштық жылдамдық компоненттері	a, P	үлкен жарты ось, жарты фокустық қашықтық

Қозғалыс интегралы

(7) және (8)-ден векторлардың шамалары үшін:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M^2 S_x \omega_y \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2 aPm^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)} \quad (9)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{MAS_y \omega_x \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2 a^2 m^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)^2} \quad (10)$$

Бөліп, $A = \alpha e$, $\alpha = Gm_0 m$ (12) ескерсек:

$$\frac{dM}{dA} = -\frac{e^2 M}{(1-e^2)A} \quad (11)$$

$$\frac{dM}{M} = -\frac{e\,de}{1-e^2} \quad (13)$$

Интегралдасақ, қозғалыс интегралын аламыз (келесі слайд).

Не байқаймыз?

M және *A* жеке-жеке өзгереді, бірақ олардың белгілі бір комбинациясы сақталады.

Мұндай баяу процестерде сақталатын шама **адиабаталық инвариант** деп аталады.

Адиабаталық инвариант

(13)-ті интегралдасақ:

$$\frac{M}{\sqrt{1-e^2}} = \text{const} \qquad (14)$$

Бұл — жүйенің **адиабаталық инварианты**:

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{\alpha^2}}} \qquad (15)$$

Ол релятивистік емес энергиямен байланысты:

$$E = -\frac{Gmm_0}{2a} = -\frac{m\alpha^2}{2M_0^2} \qquad (16)$$

Маңызы

M_0 эллипстің үлкен жарты осін анықтайды: $a = M_0^2/(m\alpha)$.

Баяу ұйытқу кезінде орбита пішіні өзгерсе де, M_0 (демек энергия E мен период T) тұрақты қалады.

Шеңберлік орбитада ($e = 0$) $M_0 = M$.

Адиабаталық теорияның негізгі теңдеулері

(15) инвариантын қосып, (5) және (6) теңдеулерін ықшам түрде жазамыз:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right] \qquad (17)$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = \left[\vec{\Omega}, \vec{e}_A\right] \qquad (18)$$

$\vec{\Omega}$ қозғалыс теңдеулерін Кеплер периоды бойынша орташалау арқылы табылады (Абдилдин):

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}}, \qquad \overline{H} = \overline{H}\left(M_0, \vec{M}\right) \qquad (19)$$

Әдістің құрылымы

Ұйытқыған H (2)

↓

Кеплер периоды бойынша орташалау: $\overline{H}$

↓

$\vec{\Omega} = \partial\overline{H}/\,\partial\vec{M}$ (19)

↓

(17)–(18): эволюция

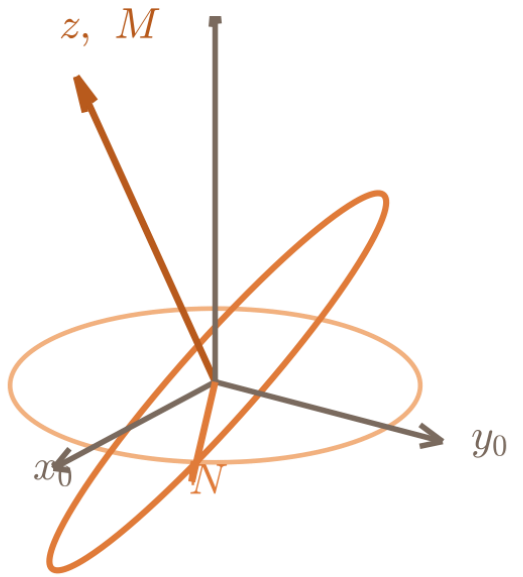
Бұл теңдеулер квазикеплер есебіндегі эволюцияны толық шешеді.

Санақ жүйелері және Эйлер бұрыштары

Техникалық мақсаттар үшін ортақ бас нүктесі бар екі санақ жүйесін енгіземіз: қозғалмайтын x_0, y_0, z_0 және айналатын x, y, z.

Вектор	Бағыты
$\vec{M}$ — орбиталық импульс моменті	z осі бойымен
$\vec{A}$ — Лаплас векторы	x осі бойымен
$\vec{r}$ — радиус-вектор	xy жазықтығында
$\vec{J}$ — орталық дененің моменті	z_0 осі бойымен

Айналатын жүйенің бағдары δ (прецессия), g (меншікті айналу), i (көлбеулік) Эйлер бұрыштарымен беріледі; $\vec{\Omega}$ олардың туындыларымен өрнектеледі.



Эйлер бұрыштары және олардың туындылары; N — түйіндер сызығы

Қорытынды

- Адиабаталық теория — қозғалыс теңдеулерін нақты шешпей релятивистік эффектілерді есептеудің тиімді әдісі.
- Ұйытқыған қозғалыс векторлық элементтер $\vec{M}$, $\vec{A}$ және айналу жылдамдығы $\vec{\Omega}$ арқылы сипатталады.
- Жүйенің адиабаталық инварианты $M_0 = M/\sqrt{1-e^2}$ энергиямен байланысты: $E = -m\alpha^2/(2M_0^2)$.
- Негізгі теңдеулер (17)–(19) квазикеплер есебін толық шешеді және айналмайтын сынақ дене үшін де жарамды.

Негізгі формулалар

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - A^2/\alpha^2}}$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{e}_A]$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}}$$

Келесі дәріс: гармониялық координаталардағы Керр метрикасы.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Abdildin M.M. Mechanics of Einstein's gravitation theory. – Nauka, 1988 (in Russian).

2. Fock V.A. The theory of space, time and gravitation. – Pergamon Press, 1964.

3. Boshkayev K., Quevedo H., Ruffini R. // Phys. Rev. D. – 2012. – 86. – 064043.

4. Abdildin M.M. The problem of motion of bodies in GR. – Qazaq Universiteti, 2006 (in Russian).

5. Schwarzschild K. // Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss. – 1916. – 189.

6. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. – San Francisco: W.H. Freeman, 1973.

7. Lense J., Thirring H. // Physikalische Zeitschrift. – 1918. – 19. – 156.

8. Landau L.D., Lifshitz E.M. The classical theory of fields. – Butterworth-Heinemann, 1994.

9. Ohanian H.C., Ruffini R. Gravitation and Spacetime. – 3rd ed. – Cambridge University Press, 2013.

10. Kerr R.P. // Phys. Rev. Lett. – 1963. – 11. – 237–238.

11. Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black holes, white dwarfs and neutron stars. – Wiley-VCH, 1983.

12. Ernst F.J. // Physical Review. – 1968. – 167. – 1175–1177.

13. Stephani H. et al. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. – Cambridge University Press, 2009.

14. Stuchlík Z., Slaný P., Török G. // Astron. Astrophys. – 2007. – 470. – 401–404.

15. Török G. et al. // Astrophys. J. – 2010. – 714. – 748–757.

16. Zhang F., Lu Y., Yu Q. // Astrophys. J. – 2015. – 809. – 127.

17. Boshkayev K., Idrissov A., Luongo O., Malafarina D. // MNRAS. – 2020. – 496. – 1115–1123.

18. Bambhaniya P. et al. // Eur. Phys. J. C. – 2021. – 81. – 205.

19. Boshkayev K. et al. // Phys. Rev. D. – 2021. – 104. – 084009.

20. Shahzadi M., Kološ M., Stuchlík Z., Habib Y. // Eur. Phys. J. C. – 2021. – 81. – 1067.

21. Török G. et al. // Astrophys. J. – 2022. – 929. – 28.