ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Дәріс 10

Лензе–Тирринг мәселесі және адиабаталық қозғалыс теориясы

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: айналатын сұйық шар үшін Фоктың бірінші жуықтауының нақты метрикасы негізінде Лензе–Тирринг есебін Гамильтон әдісімен және адиабаталық теория шеңберінде қарастыру.

Орталық дененің ішкі құрылымына байланысты интегралды ескеру Лензе–Тирринг есебінің қозғалыс теңдеулерін айтарлықтай өзгертеді.

Нәтижесінде квазикеплерлік есептердің жалпы жағдайы үшін автономды канондық теңдеулер алынады.

Дәріс жоспары

- Айналатын сұйық шардың метрикасы
- Гамильтон функциясы
- $\vec{M}$ және $\vec{A}$ қозғалыс теңдеулері
- Ішкі құрылымды ескеру
- Орташаланған гамильтониан
- Бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$
- Автономды канондық теңдеулер

Айналатын сұйық шардың метрикасы

Айналатын сұйық шар үшін Фоктың бірінші жуықтауының нақты метрикасы:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi^*}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2}(\vec{S}_0\nabla)\left(\vec{S}_0\nabla\frac{1}{r}\right)\right]dt^2$$
$$-\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt \quad (1)$$

ξ^*

дененің ішкі құрылымын ескеретін шама

$\vec{S}_0$

орталық дененің меншікті импульс моменті

U_i

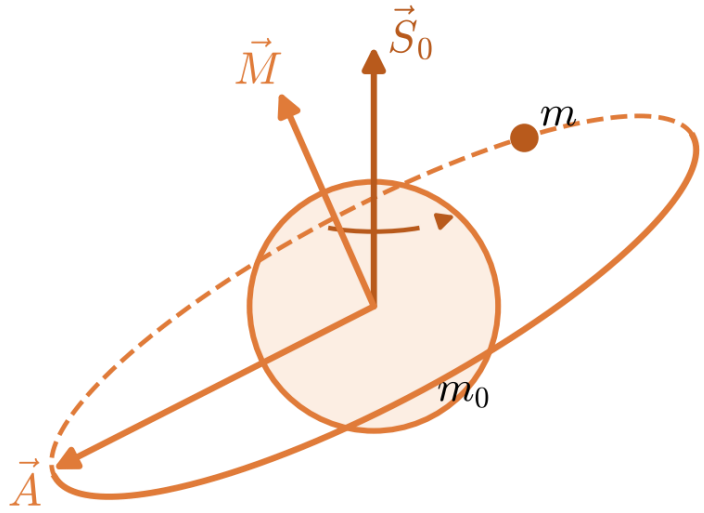
айналумен байланысты вектор-потенциал

Гамильтон функциясы

(1) метрика негізінде айналатын массивтік шар өрісіндегі сынақ денесінің финиттік қозғалысын Гамильтон әдісімен қарастырамыз:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2}\left(\frac{p^4}{8m^3} + \frac{3Up^2}{2m} + \frac{\xi_0}{m_0}mU - \frac{mU^2}{2}\right) - \frac{2\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}_0\nabla\frac{1}{r}\right]\vec{p}\right) - \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left([\vec{S}_0\nabla]\left[\vec{S}_0\nabla\frac{1}{r}\right]\right) \quad (2)$$

- Бірінші жол — Шварцшильд типті мүшелер;
- $\vec{S}_0$-ге сызықты мүше — Лензе–Тирринг әсерлесуі;
- $\vec{S}_0$-ге квадраттық мүше — айналатын шардың деформациясы.



Айналатын массивтік шар өрісіндегі сынақ денесі

Векторлық элементтердің қозғалыс теңдеулері

Гамильтон теңдеулерінен импульс моменті мен Лаплас векторы үшін:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{2\gamma}{r^3 c^2}\left[\vec{S}_0 \vec{M}\right] - \frac{12\gamma m\left(\vec{S}_0 \vec{r}\right)}{7 m_0 r^5 c^2}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right] \tag{3}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left(4E + 6mU + \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\left[\nabla U \vec{M}\right]}{mc^2} + \frac{2\gamma}{r^3 c^2}\left[\vec{S}_0 \vec{A}\right] + \frac{6\gamma\left(\vec{S}_0 \vec{M}\right)}{m r^5 c^2}\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \frac{6\gamma}{7 m_0 r^5 c^2}\left\{S_0^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \frac{5}{r^2}\left(\vec{S}_0 \vec{r}\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - 2\left(\vec{S}_0 \vec{r}\right)\left[\vec{S}_0 \vec{M}\right] + 2\left(\vec{S}_0 \vec{r}\right)\left[\vec{p}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right]\right]\right\} \tag{5}$$

$\vec{S}_0^2$-қа пропорционал мүшелер — орталық дененің айналудан туатын деформациясының (квадрупольдік) әсері.

Ішкі құрылымды ескеру

Бұл теңдеулер арқылы метриканы ішкі құрылымға байланысты интегралмен жазамыз:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2}\int \frac{\rho'\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}(dx')^3\right]dt^2$$
$$-\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1dx_1 + U_2dx_2 + U_3dx_3)dt \quad (6)$$

Не өзгереді?

Ішкі құрылымға байланысты интегралды есепке алу алдыңғы жұмыстармен салыстырғанда Лензе–Тирринг есебінің қозғалыс теңдеулерін айтарлықтай өзгертеді [1].

Интеграл ішіндегі шамалар

ρ — тығыздық, v — жылдамдық, Π — серпімділік энергиясы, P_{kk} — кернеу тензорының ізі.

Адиабаталық теория: орташаланған гамильтониан

Мәселені ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаталық теориясы негізінде қарастырып, Кеплер периоды бойынша орташалаймыз:

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M_0^3 M^3}\left[2\left(\vec{S}_0\vec{M}\right) + \frac{mS_0^2}{7m_0} - \frac{3m}{7m_0 M^2}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\right]\right\} \quad (7)$$

Мүше	Физикалық мағынасы
$15m\alpha^2/(8M_0^2)$, ξ_0	энергияның релятивистік түзетуі және ішкі құрылым
$3m\alpha^4/(M_0^3 M)$	Шварцшильд мүшесі — перигелийдің ығысуы
$2(\vec{S}_0\vec{M})$, S_0^2, $(\vec{S}_0\vec{M})^2$	айналу: Лензе–Тирринг және квадрупольдік мүшелер

Векторлық элементтер және бұрыштық жылдамдық

Векторлық элементтердегі қозғалыс теңдеулері:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega}\vec{M}], \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}\vec{A}], \qquad \vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} \tag{8}$$

Бұдан:

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2}\vec{M} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M^3 M_0^3 c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^4}\vec{M}\right\} - \frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0 M^5 M_0^3 c^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^2}\right\} \tag{9}$$

(9) формуласы Лензе–Тирринг есебі бойынша алдыңғы зерттеулердің нәтижелерін айтарлықтай толықтырады.

Квазикеплерлік есептердің жалпы жағдайы

ЖСТ механикасының квазикеплерлік есептерінің жалпы жағдайы үшін орташаланған гамильтониан:

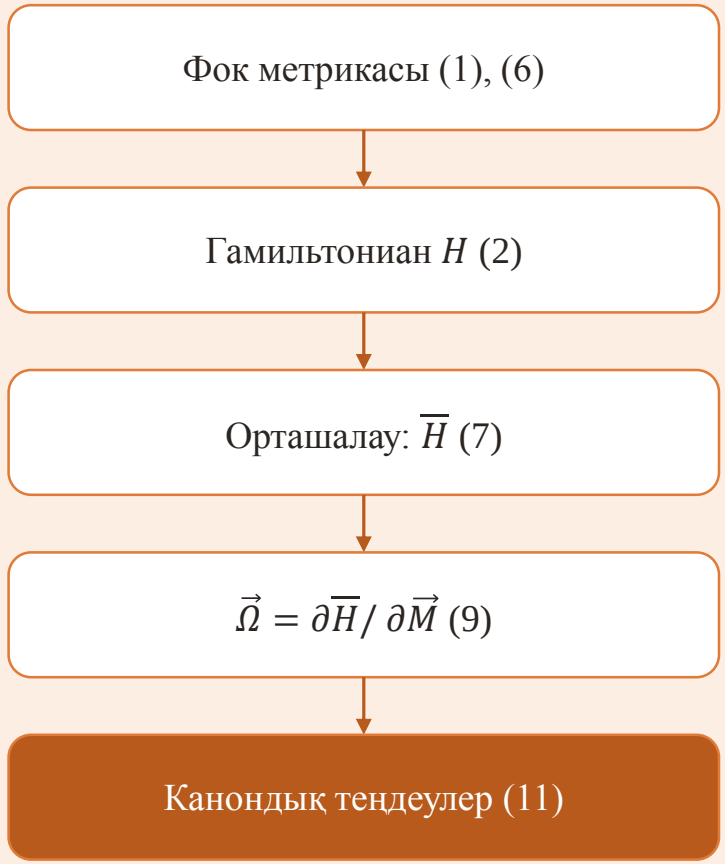
$$\overline{H} = \overline{H}\left(M_0, \vec{M}, \delta\vec{\varphi}\right) \qquad (10)$$

және автономды канондық теңдеулер:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\delta\vec{\varphi}}, \qquad \frac{d\delta\vec{\varphi}}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}} \qquad (11)$$

мұндағы $\delta\vec{\varphi}$ — **шексіз аз айналу векторы**. $\vec{M}$ мен $\delta\vec{\varphi}$ канондық түйіндес айнымалылар рөлін атқарады.

Жалпы схема



Қорытынды

- Айналатын сұйық шардың Фок метрикасы негізінде Лензе–Тирринг есебі Гамильтон әдісімен қарастырылды.
- $\vec{M}$ мен $\vec{A}$ теңдеулерінде $\vec{S}_0$-ге сызықты (Лензе–Тирринг) және квадраттық (деформация) мүшелер пайда болады.
- Ішкі құрылымға байланысты интегралды ескеру қажет — ол қозғалыс теңдеулерін айтарлықтай өзгертеді.
- Адиабаталық теория $\vec{\Omega}$ (9) өрнегін береді және квазикеплер есептері үшін автономды канондық теңдеулерге (11) әкеледі.

Негізгі формулалар

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}\vec{A}]$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}}$$

$$\frac{d\delta\vec{\varphi}}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}}$$

Курс бойынша: ЖСТ механикасындағы адиабаталық теорияның қолданулары.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Фок В.А. Начала квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 376 с.

2. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. – М.: Сов. радио, 1970.

3. Эйнштейн А. Принципиальное содержание общей теории относительности // Собр. науч. тр. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – С. 613–615.

4. Фок В.А. Об основных принципах теории тяготения Эйнштейна // Современные проблемы гравитации. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1967. – С. 5–11.