ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Дәріс 3

ЖСТ-ның негізгі теңдеулері және белгілі шешімдер

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: Фоктың нақтыланған бірінші жуықтау метрикасы негізінде ЖСТ механикасының классикалық есебін — Шварцшильд есебін векторлық элементтер әдісімен шешу.

ЖСТ кеңістік пен уақытты абсолютті және тәуелсіз субъектілер ретінде емес, кеңістік-уақыттың қисық геометриясы ретінде қарастырады: гравитация — күш емес, қисықтықтың көрінісі.

Нәтижесінде перигелий ығысуының белгілі Эйнштейн формуласы алынады.

Дәріс жоспары

- ЖСТ — тензорлық теңдеулер жүйесі
- Шварцшильд есебінің қойылымы
- Векторлық элементтер $\vec{M}$, $\vec{A}$
- Лагранжиан мен гамильтониан
- Қозғалыс теңдеулері
- Лаплас векторының эволюциясы
- Период бойынша орташалау
- Перигелийдің ығысуы
- Бақылаулармен салыстыру

ЖСТ — кеңістік-уақыттың геометриялық теориясы

Эйнштейн теңдеулері — материя мен энергияның **кеңістік-уақытты қисаюын** сипаттайтын **тензорлық теңдеулер** жүйесі. Олардың шешімдері әртүрлі физикалық сценарийлер үшін кеңістік-уақыт метрикасы туралы ақпарат береді.

Қара құрдымдар

Шварцшильд, Керр шешімдері: горизонт, айналу, күшті өріс.

Космология

Біртекті әрі изотропты Әлемнің кеңеюін сипаттайтын шешімдер.

Гравитациялық толқындар

Сызықталған теңдеулердің толқындық шешімдері.

Бұл дәрістің есебі: массасы m сынақ денесінің массасы үлкен m_0 дененің орталық өрісіндегі қозғалысы (Шварцшильд есебі). Айналатын сұйық шарға арналған Фоктың нақтыланған бірінші жуықтау метрикасын қолданамыз.

Шварцшильд есебінің қойылымы

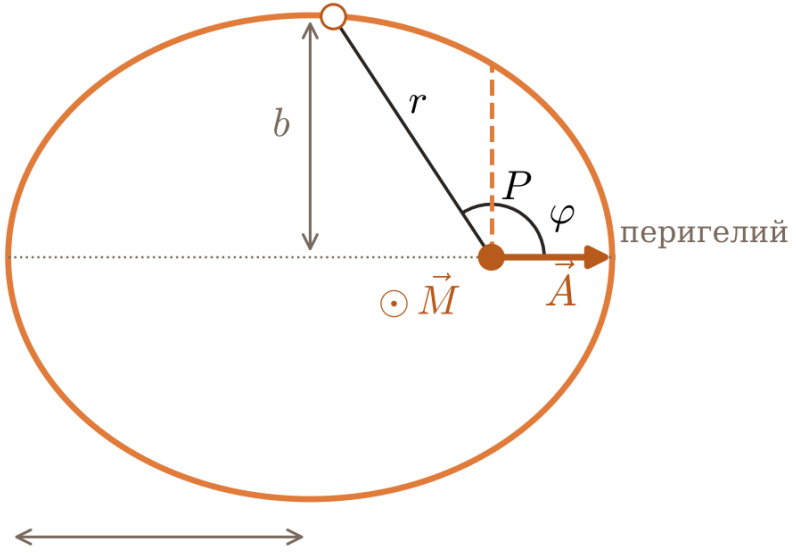
Орталық өрістегі нақтыланған метрика [1]:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi_0^*}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (1)$$

мұндағы орталық дененің ньютондық потенциалы:

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}$$

- ξ_0^* — орталық дененің ішкі құрылымын ескеретін шама;
- γ — гравитациялық тұрақты, m_0 — орталық дене массасы;
- метрика $1/c^2$ дәлдігімен постньютондық әсерлерді қамтиды.



Кеплер эллипсі: $\vec{A}$ перигелийге, $\vec{M}$ орбита жазықтығына перпендикуляр

Орбиталық координаталар жүйесінің бірлік векторлары: $\vec{k}$ — $\vec{M}$ бойымен, $\vec{\imath}$ — $\vec{A}$ бойымен.

Векторлық элементтер

Есепті $\vec{k}$ және $\vec{\imath}$ бірлік векторларымен бағыттас векторлық элементтер арқылы сипаттаймыз:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}\,] \tag{2}$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}, \qquad A = \gamma m m_0 e \tag{3}$$

Олардың уақыт бойынша өзгерісі:

$$\dot{\vec{M}} = [\dot{\vec{r}}, \vec{p}\,] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}\,] \tag{4}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}, \vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}, \dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{5}$$

Физикалық мағынасы

$\vec{M}$ — орбиталық импульс моменті: орбита жазықтығының бағдарын анықтайды.

$\vec{A}$ — Лаплас векторы: перигелийге бағытталған, ұзындығы эксцентриситетке пропорционал.

Ньютон механикасында екеуі де тұрақты; релятивистік түзетулер олардың баяу эволюциясын тудырады.

Лагранжиан және гамильтониан

Гамильтон теңдеулері:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \qquad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \tag{6}$$

Жалпыланған импульс:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2}\right) m\vec{v} \tag{9}$$

(1) метрикадан қажетті жуықтауда интервал (7) мен Лагранж функциясы:

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2 + m\left(U + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{m}{2c^2}\left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{1}{4}v^4 - \frac{2\xi_0^*}{m_0}U\right) \tag{8}$$

Соңында гамильтониан:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{m\xi_0^*}{m_0c^2}U \tag{10}$$

Қозғалыс теңдеулері

(10)-ды (6)-ға қойсақ:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2} \qquad (11)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\gamma m m_0}{r^3}\vec{r} - \frac{mU}{c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3p^2}{2mc^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{m\xi_0^*}{m_0c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \qquad (12)$$

Бұларды (4)-ке қойсақ, $\dot{\vec{M}} = 0$ шығады, ал Лаплас векторы үшін:

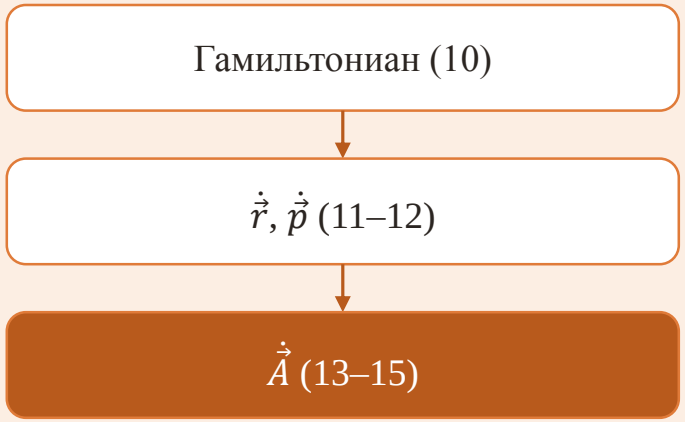
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}, \vec{M}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \qquad (13)$$

$\frac{d}{dt}(\vec{r}/r)$ туындысын (11) арқылы есептеп (14), $\nabla = \partial/\partial\vec{r}$ операторымен (15) өрнегін аламыз.

Маңызды салдар

Орталық өрісте $\vec{M}$ сақталады: орбита жазықтығы бұрылмайды.

Бар релятивистік эффект — Лаплас векторының айналуы, яғни перигелийдің ығысуы.



Лаплас векторының эволюциясы

Энергияның сақталуының релятивистік емес заңын қолданып, (15)-тің оң жағын жеңілдетеміз:

$$E = \frac{p^2}{2m} - mU = -\frac{\gamma m m_0}{2a} \tag{16}$$

a — эллипстің жартылай үлкен осі. Қарапайым есептеулерден кейін:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(\frac{2E}{m} + 3U + \frac{\xi_0^*}{2m_0}\right)\frac{[\vec{r}, \vec{M}]}{r^3} \tag{17}$$

немесе:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{4E}{m} + \frac{\xi_0^*}{m_0}\right)[\nabla U, \vec{M}] + \frac{3}{c^2}[\nabla U^2, \vec{M}] \tag{18}$$

Неге векторлық элементтер?

(17) теңдеуі өте қарапайым әрі түсінікті — бұл $\vec{M}$ және $\vec{A}$ қолданудың басты артықшылығы.

Оң жақтағы $1/c^2$ көбейткішінің арқасында перигелийдің орны өте баяу өзгереді.

Ғасырлық өзгерістерді табу үшін (17)-ні T период бойынша орташалаймыз.

Период бойынша орташалау

Орташа мәндерді табу керек [2]:

$$\overline{\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^3}\,dt, \qquad \overline{\left(\frac{\vec{r}}{r^4}\right)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^4}\,dt \tag{19}$$

Импульс моментінің сақталуынан $M = mr^2\dot{\varphi}$ (20), сондықтан $dt = \frac{mr^2}{M}d\varphi$ (21) — t-дан φ бойынша интегралға көшеміз:

$$\overline{\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} \vec{e}_r\, d\varphi = 0 \tag{22}$$

$$\overline{\left(\frac{\vec{r}}{r^4}\right)} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r\, d\varphi}{r} = \frac{\pi m e}{MTP}\,\vec{i} \tag{23}$$

Белгілеулер

P — эллипс параметрі, e — эксцентриситет.

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \tag{24}$$

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$$

Орташалау тек $\vec{i}$ бағытындағы құраушыны қалдырады — ол $\vec{A}$ векторымен бағыттас.

Перигелийдің ығысуы

Орташаланған (17) теңдеуі:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\left[\vec{e}_M, \vec{A}\right], \qquad \vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{M} = \vec{k} \tag{25–26}$$

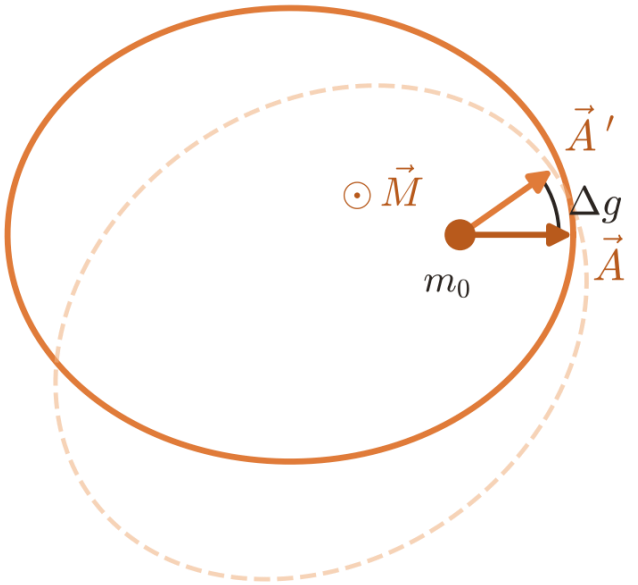
Демек $\vec{A}$ векторы $\vec{M}$ маңында тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналады, шамасы өзгермейді:

$$\vec{\Omega}_A = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M \tag{27}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_A, \vec{A}\right] \tag{28}$$

T период ішінде g полярлық бұрышының өзгерісі (29–30):

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2} \tag{30}$$



Әр айналымда $\vec{A}$ векторы Δg бұрышқа бұрылады

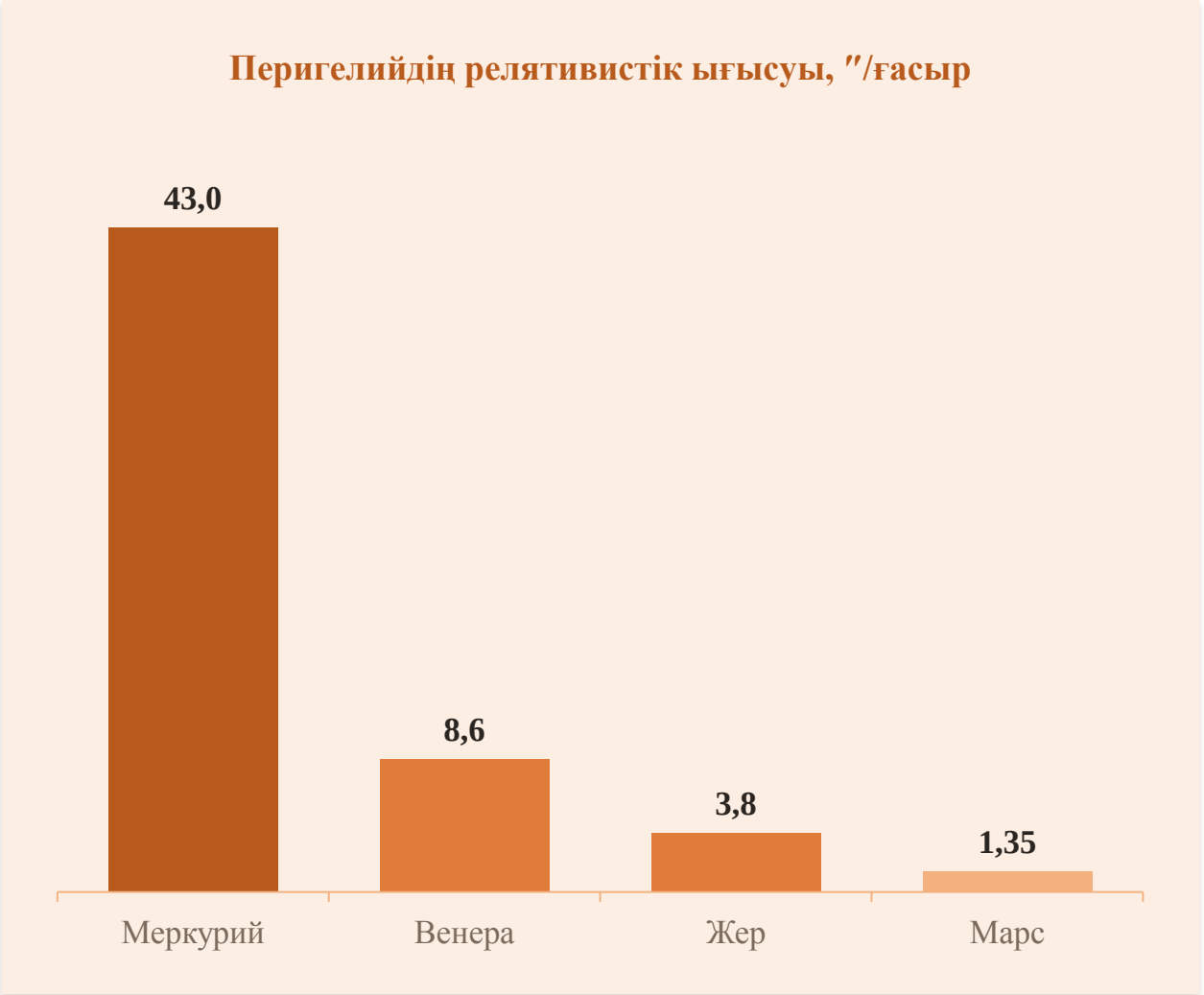
Нақтыланған метрика Шварцшильд есебіндегі перигелий ығысуын дұрыс береді [3].

Бақылаулармен салыстыру

(30) формуласы бойынша ығысу орталық денеге жақын және эксцентриситеті үлкен орбиталарда ең үлкен болады.

Күн жүйесінің планеталары үшін ғасырдағы релятивистік ығысу:

Планета	a, а.б.	e	Δg, ″/ғасыр
Меркурий	0.387	0.206	43.0
Венера	0.723	0.007	8.6
Жер	1.000	0.017	3.8
Марс	1.524	0.093	1.35



Қорытынды

- Шварцшильд есебі Фоктың нақтыланған бірінші жуықтау метрикасы негізінде шешілді.
- Векторлық элементтер $\vec{M}$ және $\vec{A}$ қозғалыс теңдеулерін өте қарапайым түрге келтіреді.
- Орталық өрісте $\vec{M}$ сақталады, ал $\vec{A}$ векторы $\vec{M}$ маңында $\vec{\Omega}_A$ бұрыштық жылдамдықпен айналады.
- Бір период ішіндегі перигелий ығысуы — Эйнштейн формуласы (30).
- Нақтыланған метрика Меркурийдің 43″/ғасыр ығысуын дұрыс түсіндіреді.

Негізгі формулалар

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_A, \vec{A}\right]$$

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}$$

Келесі дәріс: қозғалыс теңдеулерінің жалпы көрінісі (Лензе–Тирринг есебі).

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1961. – 564 с.
2. Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ университеті, 2006. – 132 с.
3. Gordon W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie // Z. Phys. – Bd. 40. – S. 117–133.