ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Дәріс 4

Қозғалыс теңдеулерінің жалпы көрінісі

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: айналатын массивтік шар өрісіндегі сынақ денесінің финиттік қозғалысы туралы Лензе–Тирринг есебін бірінші жуықтау метрикасы негізінде векторлық элементтер әдісімен қарастыру.

Орталық дененің меншікті айналуы $\vec{S}_0$ гравитомагниттік өріс тудырады — ол орбитаның прецессиясына және перигелийдің қосымша ығысуына әкеледі.

Нәтиже: перигелийдің абсолютті ығысуы Шварцшильд және айналу мүшелерінің қосындысы (суперпозиция принципі).

Дәріс жоспары

- ЖСТ негізгі идеялары
- Лензе–Тирринг метрикасы
- Гравитациялық вектор-потенциал
- Лагранжиан, гамильтониан
- $\vec{M}$ және $\vec{A}$ теңдеулері
- Ньютон эллипсі бойынша орташалау
- Бұрыштық жылдамдықтар
- Эйлер бұрыштары
- Перигелийдің абсолютті ығысуы

ЖСТ негізгі идеялары

1 Эквиваленттілік принципі

Бақылаушы гравитациялық күш пен үдеудің әсерін ажырата алмайды.

2 Кеңістік-уақыт геометриясы

Масса мен энергия кеңістік-уақытты қисайтады; қисаю метрикалық тензормен анықталады. Гравитация — геометрияның әсері.

3 Эйнштейн теңдеулері

Метрикалық тензорды масса мен энергияның таралуымен байланыстырады.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

ЖСТ эффектілері: гравитациялық қызыл ығысу, гравитациялық линзалау, гравитациялық толқындар — бәрі тәжірибе мен бақылауларда расталған.

Лензе–Тирринг есебі және метрика

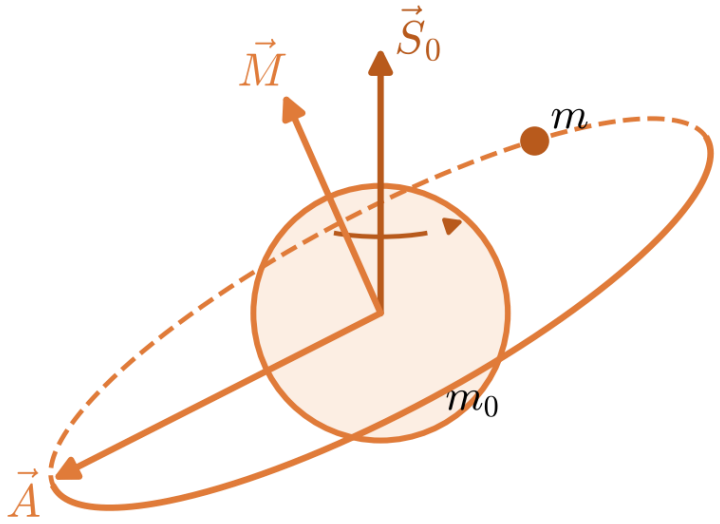
Айналатын массивтік шар өрісіндегі материалдық бөлшектің финиттік қозғалысын алғаш Лензе мен Тирринг зерттеді [1]. Олардың метрикасы:

$$ds^2 = [c^2 - 2U]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt \quad (2)$$

Бірінші жуықтаудың біршама қысқартылған метрикасы:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt \quad (3)$$

Айырмашылық — g_{00} құраушысындағы $2U^2/c^2$ сызықты емес мүшесі.



Айналатын орталық дене ($\vec{S}_0$) және сынақ денесінің орбитасы

U_i — гравитациялық вектор-потенциал: орталық дененің айналуымен байланысты.

Гравитациялық вектор-потенциал

Шекті аймақта стационар қозғалатын денелер жүйесі үшін:

$$\vec{U} = \gamma \int \frac{(\rho\vec{v})'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' = \gamma \sum_b \frac{m_b \vec{v}_b}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} \quad (4)$$

$\vec{r}_b$ — денелердің радиус-векторы. Жіктеу және тепе-теңдік:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\,\vec{r}_b)}{r^3} + \cdots \quad (5)$$

$$(\vec{r}\vec{r}_b)\vec{v}_b = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{r}_b(\vec{r}_b\vec{r}) + \frac{1}{2}[\vec{r}[\vec{v}_b\vec{r}_b]] \quad (6)$$

(7)-ні уақыт бойынша орташалағанда, толық туындылар жойылады:

$$\vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}[\vec{r}\,\vec{S}_0] = \frac{\gamma}{2}\left[\nabla\frac{1}{r}, \vec{S}_0\right] \quad (8)$$

Жүйенің импульс моменті

$$\vec{S}_0 = \sum_b [\vec{r}_b, m_b\vec{v}_b] \quad (9)$$

Вектор-потенциал айналатын дененің меншікті моментімен анықталады.

Ол магниттік дипольдің вектор-потенциалына ұқсас — сондықтан эффект **гравитомагниттік** деп аталады.

Лагранжиан, импульс және гамильтониан

$L = -mc\,ds/dt$ (10), ал (3)-тен ds (11) өрнегін тауып, (10)-ға қойсақ:

$$L = -mc^2 + m\left(U + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{m}{2c^2}\left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{1}{4}v^4 + 8\left(\vec{U}\vec{v}\right)\right) \quad (12)$$

Импульс:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2}\right)m\vec{v} - \frac{4m}{c^2}\vec{U} \quad (13)$$

Гамильтониан:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{4\left(\vec{p}\vec{U}\right)}{c^2} \quad (14)$$

Соңғы мүше — айналумен байланысты гравитомагниттік әсерлесу.

Векторлық элементтердің қозғалыс теңдеулері

$$\dot{\vec{M}} = [\dot{\vec{r}}\vec{p}] + [\vec{r}\dot{\vec{p}}] \tag{15}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}\vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}\dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{16}$$

(17–19) өрнектерін қойсақ, (15) және (16) былай жазылады:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{S}_0\vec{M}] \tag{20}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\gamma m_0(4E + 6mU)}{mc^2 r^3}[\vec{r}\vec{M}] + \frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{S}_0\vec{A}] + \frac{6\gamma(\vec{S}_0\vec{M})}{mc^2 r^5}[\vec{r}\vec{M}] \tag{21}$$

Шварцшильдтен айырмашылығы

Енді $\vec{M}$ сақталмайды: ол $\vec{S}_0$ маңында прецессияланады — орбита жазықтығы бұрылады.

$\vec{A}$ теңдеуіне $\vec{S}_0$-ге байланысты екі жаңа мүше қосылады.

Келесі қадам — Ньютон эллипсі бойынша орташалау.

Ньютон эллипсі бойынша орташалау

r-дің уақытқа тәуелділігінің параметрлік көрінісі [2]:

$$r = a(1 - e\cos\xi), \qquad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi) \tag{22}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e\cos\xi)^2} \tag{23}$$

Жалпы формула [3] (P_n — Лежандр полиномы):

$$J_{n+1} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e\cos\xi)^{n+1}} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\right) \tag{24}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{1}{a^3(1 - e^2)^{3/2}} \tag{26}$$

Лежандр полиномдары (25)

n	P□(x)
0	1
1	x
2	(3x² − 1)/2
3	(5x³ − 3x)/2
4	(35x⁴ − 30x² + 3)/8

$n = 1$ үшін $P_1(x) = x$ — бұдан (26) бірден шығады.

Қарапайым әдіс: импульс моментінің сақталуы

$r = \frac{P}{1+e\cos\varphi}$ және $d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$ ескерсек, интеграл қарапайым болады:

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r} = \frac{m}{TMP}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi m}{TMP} \qquad (27–28)$$

Кеплер есебінің шамалары (f — орбита ауданы, b — кіші жарты ось):

$$TM = 2mf, \quad f = \pi ab, \quad b = a\sqrt{1-e^2}, \quad P = a(1-e^2) \qquad (29)$$

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{\pi}{fP} = \frac{1}{abP} = \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \qquad (30)$$

$$\overline{\left(\frac{\vec{r}}{r^5}\right)} = \frac{2\pi me}{TMP^2}\vec{\imath} = \frac{e}{a^4(1-e^2)^{5/2}}\vec{\imath} \qquad (32)$$

Нәтижелер сәйкес

Екі әдіс те (26) және (30) бірдей нәтиже береді.

Шварцшильд есебінен белгілі:

$$\overline{\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)} = 0, \quad \overline{\left(\frac{\vec{r}}{r^4}\right)} = \frac{e\,\vec{\imath}}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} \qquad (31)$$

Орташалау тек $\vec{A}$ бағытындағы ($\vec{\imath}$) құраушыларды қалдырады.

Бұрыштық жылдамдықтар

Табылған орташа мәндермен (20) және (21) теңдеулері айналу теңдеулеріне келеді:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega}_M \vec{M}] \quad (33)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}_A \vec{A}] \quad (34)$$

$$\vec{\Omega}_M = \frac{2\gamma \vec{S}_0}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \quad (35)$$

$$\vec{\Omega}_A = \frac{\gamma}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} \vec{M} + 2\left(\vec{S}_0 - 3(\vec{S}_0 \vec{e}_M)\vec{e}_M\right) \right] \quad (36)$$

$\vec{\Omega}_M$ мен $\vec{\Omega}_A$ орнына ортақ бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_A$ (37) енгізсек: $\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega}\vec{M}]$, $\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}\vec{A}]$ (38–39).

Қорытынды

$\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлары **шамасы бойынша емес, бағыты бойынша** өзгереді.

$\vec{M}$ — $\vec{S}_0$ маңында (35) бұрыштық жылдамдықпен прецессияланады.

$\vec{A}$ — екі қозғалысқа қатысады: $\vec{S}_0$ маңында прецессия және орбита жазықтығында айналу.

Орбита жазықтығындағы айналу

$\vec{A}$ векторының орбита жазықтығындағы айналу жылдамдығы:

$$\vec{\Omega}_g = \frac{\gamma}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} \vec{M} - 6(\vec{S}_0 \vec{e}_M)\vec{e}_M \right] \quad (40)$$

(35)-ке сәйкес:

$$\frac{\gamma}{a^3(1-e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma m}{TMP} \quad (41)$$

сонда:

$$\vec{\Omega}_g = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M - \frac{12\pi\gamma m(\vec{S}_0\vec{e}_M)}{TMPc^2}\vec{e}_M \quad (42)$$

1-мүше: Шварцшильд

$$\vec{\Omega}_A = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M$$

орталық өрістің ньютондық емес табиғаты

2-мүше: айналу түзетуі

Орталық дененің меншікті айналуына байланысты. Эффектілер бір-бірінен тәуелсіз — **суперпозиция принципі**.

Эйлер бұрыштары

$\vec{\Omega}$ қозғалатын x, y, z жүйесінің қозғалмайтын x_0, y_0, z_0 жүйесіне қатысты бағытын анықтайтын δ, g, i Эйлер бұрыштарының туындыларымен байланысты [4]:

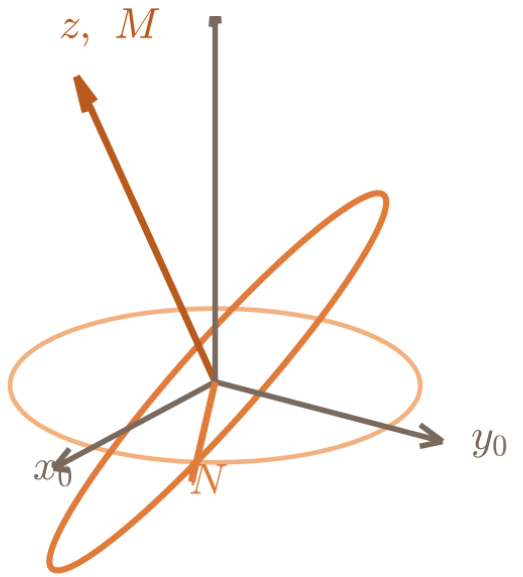
$$\vec{\Omega} = \dot{\delta}\,\vec{e}_{z_0} + i\,\vec{e}_{\delta} + \dot{g}\,\vec{e}_z \qquad (43)$$

$\vec{e}_{\delta}$ — түйіндер сызығының бірлік векторы. z_0 осін $\vec{S}_0$ бойымен бағыттап, (43) мен (36)-ны салыстырсақ:

$$\dot{\delta} = \frac{2\gamma S_0}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \qquad (44)$$

$$i = 0 \qquad (45)$$

$$\dot{g} = \frac{\gamma}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} M - 6\left(\vec{S}_0 \vec{e}_M\right)\right] \qquad (46)$$



δ — прецессия, g — меншікті айналу, i — нутация (орбита көлбеулігі)

$i = 0$: орбитаның көлбеулігі уақыт бойынша өзгермейді.

Перигелийдің абсолютті ығысуы

Бір период ішіндегі өзгерістер:

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2} - \frac{12\pi\gamma m(\vec{S}_0\vec{e}_M)}{a(1-e^2)Mc^2} \quad (47)$$

$$\Delta\delta = \frac{4\pi\gamma m S_0}{a(1-e^2)Mc^2} \quad (48)$$

$\vec{S}_0 \uparrow\uparrow \vec{M}$ жағдайында, яғни сынақ денесі орталық дененің **экваторлық жазықтығында** қозғалғанда, перигелийдің абсолютті ығысуы [5]:

Δδ — түйіндер сызығының бұрылуы, Δg — перигелийдің түйін сызығына қатысты ығысуы.

$$\Delta g_{\text{abs}} = \Delta g + \Delta\delta = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2} - \frac{8\pi\gamma m S_0}{a(1-e^2)Mc^2} \quad (49)$$

Қорытынды

- Лензе–Тирринг есебі бірінші жуықтау метрикасының қысқартылған түрі (3) негізінде шешілді.
- Орталық дененің айналуы гравитациялық вектор-потенциал $\vec{U}$ арқылы ескеріледі.
- $\vec{M}$ мен $\vec{A}$ тек бағыты бойынша өзгереді: $\vec{M}$ — $\vec{S}_0$ маңында прецессия, $\vec{A}$ — қосымша орбита жазықтығында айналады.
- Орбитаның көлбеулігі тұрақты: $i = 0$.
- Перигелийдің абсолютті ығысуы Шварцшильд және айналу мүшелерінің қосындысы — суперпозиция принципі орындалады.

Логикалық тізбек

Метрика (3), $\vec{U}$ (8)

↓

L, $\vec{p}$, H (12–14)

↓

$\dot{\vec{M}}$, $\dot{\vec{A}}$ (20–21)

↓

Орташалау (26–32)

↓

$\vec{\Omega}$, Эйлер бұрыштары

↓

Δg_{abs} (49)

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Тредер Г. Теория гравитации и принцип эквивалентности. – М.: Атомиздат, 1973. – 168 с.
2. Фок В.А. Начала квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
3. Mandel H. Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie // Z. Phys. – Bd. 39. – S. 136–145.
4. Румер Ю.Б. Исследования по 5-оптике. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 152 с.
5. Калуца Т. К проблеме единства физики // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979. – С. 529–534.