Дәріс 6

Гармониялық координаттардағы Керр метрикасы

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: айналатын қара құрдымдарды сипаттайтын Керр метрикасын Бойер–Линдквист координаттарынан гармониялық координаттарға түрлендіріп, постньютондық жуықтауда жазу.

Гармониялық түр релятивистік түзетулерді нақты анықтауға және Керр метрикасын адиабаталық теорияда қолдануға қажет.

Керр метрикасы қара құрдымдарды, олардың айналуын және аккреция дискілері мен квазарлар маңындағы гравитациялық динамиканы зерттеуде кеңінен қолданылады.

Дәріс жоспары

- Кіріспе: ЖСТ және Керр шешімі
- Бойер–Линдквист координаттарындағы метрика
- Гармониялық координаттар шарты
- Координаталық түрлендіру
- Гармониялық координаттардағы метрика
- Метрика мүшелерінің физикалық мағынасы
- Постньютондық реттер

Кіріспе

1 1915

Эйнштейн ЖСТ-ны ұсынды: гравитация — масса мен энергия әсерінен кеңістік-уақыттың иілуі.

2 1963

Рой Керр айналатын қара құрдымдарды сипаттайтын Эйнштейн теңдеулерінің шешімін тапты.

3 Координаттар

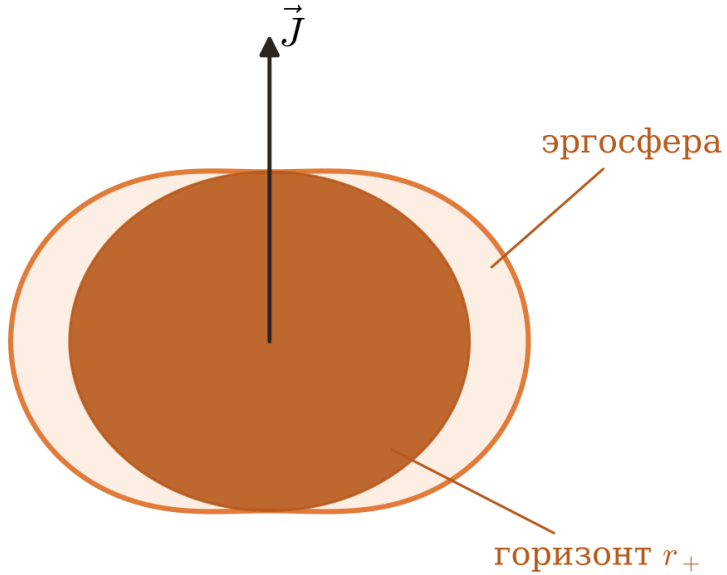
Кеңістіктік координаттарды дұрыс таңдау гравитация физикасында шешуші рөл атқарады.

4 Гармониялық теңдеулер

Гармониялық координаттар Эйнштейн теңдеулерін математикалық артықшылықтары бар арнайы түрде жазуға мүмкіндік береді.

Бойер–Линдквист координаттарындағы Керр метрикасы

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu R}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}\right)c^2dt^2 - \frac{R^2 + a^2\cos^2\Theta}{R^2 - 2\mu R + a^2}dR^2 - (R^2 + a^2\cos^2\Theta)d\Theta^2 + \frac{4\mu R a\sin^2\Theta}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}\,dt\,d\phi - \left(R^2 + a^2 + 2\mu\frac{Ra^2\sin^2\Theta}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}\right)\sin^2\Theta\,d\phi^2 \quad (1)$$



Керр қара құрдымының горизонты мен эргосферасы ($a = 0.9\,\mu$)

μ және a параметрлері орталық дененің массасы m_0 мен бұрыштық импульсі J-ге байланысты:

$$\mu = \frac{Gm_0}{c^2}, \qquad a = \frac{J}{m_0 c} \quad (2)$$

$a = 0$ болғанда (1) Шварцшильд метрикасына көшеді.

Гармониялық координаттар шарты

Бұл дәрісте келесі шартты қанағаттандыратын x^{μ} гармониялық координаталарды енгіземіз [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = 0 \qquad (3)$$

$g^{\mu\nu}$ — контравариантты метрикалық тензор, g — оның анықтауышы. Кристоффель символдары арқылы [2]:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\, g^{\nu\lambda} = 0 \qquad (4)$$

Гармониялық координаттар үлкен қашықтықта кеңістік-уақытты біртекті әрі изотропты деп санауға болатын жағдайлармен байланысты.

Біртектілік пен изотроптылық салдары

Кеңістік-уақыттың біртектілігі мен изотроптылығы қозғалыстың бірінші интегралдарына әкеледі:

- энергияның сақталуы;
- импульстің сақталуы;
- бұрыштық импульстің сақталуы.

Сондықтан гармониялық координаттар ЖСТ-ның көптеген есептері үшін маңызды.

Бойер–Линдквисттен гармониялық координаттарға

Адиабаталық теорияда қолдану үшін (1) метрикасы $1/c^2$ дәрежелер қатарына жіктеледі. Координаталық түрлендіру [3]:

$$R = r + \frac{1}{c^2}\left(Gm_0 - \frac{J^2\sin^2\theta}{2m_0^2 r}\right) \tag{5}$$

$$\Theta = \theta - \frac{J^2\sin^2\theta\cos\theta}{2c^2 m_0^2 r^2} \tag{6}$$

Бойер–Линдквист (t, R, Θ, ϕ) → Түрлендіру (5)–(6) → Гармониялық (t, r, θ, ϕ)

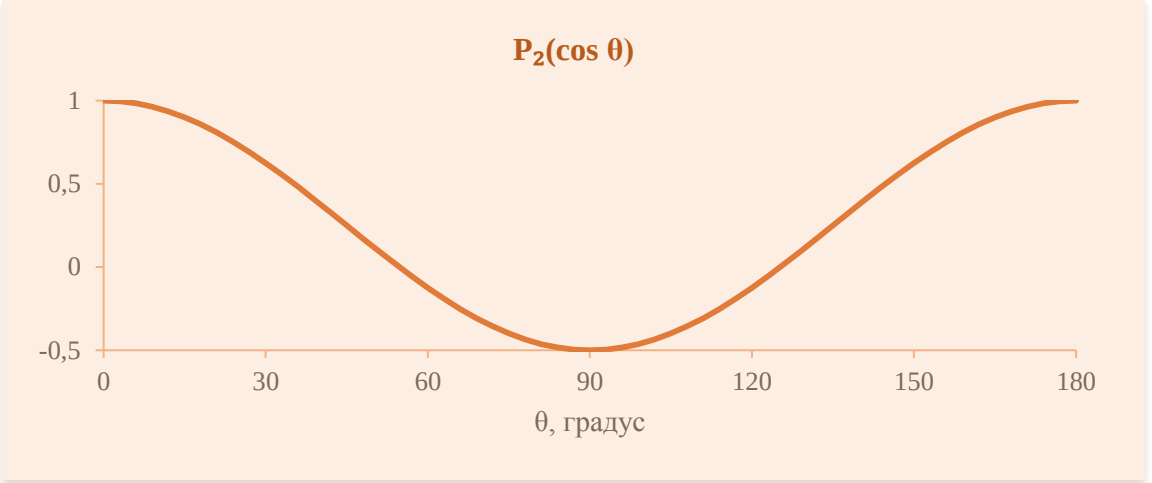
Гармониялық координаттардағы Керр метрикасы

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm_0}{c^2 r} + \frac{2G^2 m_0^2}{c^4 r^2} + \frac{2GJ^2}{c^4 m_0 r^3} P_2(\cos\theta)\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2Gm_0}{c^2 r}\right)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2) + \frac{4GJ}{c^2 r} \sin^2\theta \, dt \, d\phi \quad (7)$$

мұндағы Лежандр полиномы:

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

Метрика (7) $1/c^2$ жуықтауында гармониялық шартты қанағаттандырады [4–9].



Метрика мүшелерінің физикалық мағынасы

(7) метрикасындағы әр мүшенің рөлі:

Мүше	Реті	Физикалық мағынасы
$\mathbf{1 - 2Gm_0/(c^2r)}$	Ньютон	Ньютондық потенциал — классикалық тартылыс
$\mathbf{2G^2m_0^2/(c^4r^2)}$	$1/c^2$ түзету	Өрістің сызықты еместігі (Шварцшильд эффектісі)
$\mathbf{2GJ^2P_2(\cos\theta)/(c^4m_0r^3)}$	$1/c^2$ түзету	Айналудан туатын квадрупольдік деформация ($\sim J^2$)
$\mathbf{(1 + 2Gm_0/(c^2r))(dr^2 + \ldots)}$	$1/c^2$	Үш өлшемді кеңістіктің қисаюы
$\mathbf{4GJ \sin^2\theta\, dt\, d\varphi/(c^2r)}$	$1/c^2$	Лензе–Тирринг эффектісі: координаталық торды тарту

Уақыттық құраушыда алғашқы екі мүше Ньютон теориясына, соңғы екеуі $1/c^2$-қа пропорционал болғандықтан тек релятивистік.

Бірінші ретті постньютондық (1PN) жуықтау

1PN жуықтауда құраушыларға қажетті дәлдік әртүрлі:

$$\begin{aligned} g_{00} &\sim \frac{1}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right) \\ g_{0j} &\sim \frac{1}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \\ g_{jk} &\sim \frac{1}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Интервалда $g_{00}(dx^0)^2$, $g_{0j}dx^0dx^j$, $g_{jk}dx^jdx^k$ бар ($x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$), сондықтан:

$$ds^2 \sim \frac{1}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \tag{9}$$

Лагранж және Гамильтон функциялары, импульс, жылдамдық, орбиталық момент те 1PN-де $\sim 1/c^2 + O(1/c^4)$ болады [10, 11].

Айналу эффектісі

Айналу метриканың 1,5PN жуықтауында — g_{0j} құраушысының $1/c^3$ ретінде пайда болады.

Бірақ интервалда ол $c\,dt\,dx^j$ көбейткішіне байланысты **1PN** жуықтауында көрінеді [12, 13].

Қорытынды

- Керр метрикасы — айналатын қара құрдымдарды сипаттайтын Эйнштейн теңдеулерінің нақты шешімі.
- Бойер–Линдквист координаттарынан (5)–(6) түрлендіру арқылы гармониялық координаттарға көшеміз.
- Гармониялық түрдегі метрика (7) Ньютон мүшелерін, сызықты еместікті, J^2 квадрупольді және Лензе–Тирринг мүшесін айқын көрсетеді.
- 1PN жуықтауда айналу эффектісі интервалда $1/c^2$ ретте пайда болады — бұл адиабаталық теорияда қолдануға негіз.

Негізгі формулалар

$$\mu = \frac{Gm_0}{c^2}, \quad a = \frac{J}{m_0 c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = 0$$

$$P_2 = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

Келесі дәріс: Керр өрісіндегі сынақ денелерінің постньютондық қозғалысы.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Fock V.A. The theory of space, time and gravitation. – Pergamon Press – Macmillan, 1964.

2. Stewart J. Advanced General Relativity. – Cambridge University Press, 1993.

3. Boshkayev K.A., Suleymanova S.S., Zhami B.A., Taukenova A.S., Aimuratov Y.K. // News of the NAS RK. – 2015. – 3. – 43–48 (in Russ.).

4. Ruiz E. // General Relativity and Gravitation. – 1986. – 18. – 805–81.

5. Abe M., Ichinose S., Nakanishi N. // Progress of Theoretical Physics. – 1987. – 78. – 1186–1201.

6. Liu Q.H. // Chinese Physics Letters. – 1998. – 15. – 313–314.

7. Aguirregabiria J.M., Bel L., Martín J., Molina A., Ruiz E. // Gen. Rel. Grav. – 2001. – 33. – 1809–1837.

8. Bičák J., Katz J. // Czechoslovak Journal of Physics. – 2005. – 55. – 105–118.

9. Jiang C., Lin W. // General Relativity and Gravitation. – 2014. – 46. – 1671.

10. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. – San Francisco: W.H. Freeman, 1973.

11. Poisson E., Will C.M. Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic. – Cambridge University Press, 2014.

12. Landau L.D., Lifshitz E.M. The classical theory of fields. – Butterworth-Heinemann, 1994.

13. Brumberg V.A. Relativistic Celestial Mechanics. – Nauka, 1972.