ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Дәріс 7

ЖСТ-дағы постньютон жуықтаудағы сынақ денелерінің қозғалысы: әдістеме, нәтижелер және талдау

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: әлсіз өріс пен төмен жылдамдықтағы ЖСТ жуықтауы — постньютондық жуықтауда сынақ денелерінің қозғалысының әдістерін, нәтижелерін және талдауын беру.

Адиабаталық теорияны Керр кеңістік-уақытында қолданамыз: Керр метрикасы $1/c^2$ дәрежесінде жіктеліп, гармониялық координаттарда жазылған (6-дәріс).

Нәтиже: экваторлық емес орбиталар үшін перигелийдің абсолютті ығысуы.

Негізгі аспектілер

- Постньютондық жуықтау әдісі
- Метрикалық тензор, Кристоффель символдары, қозғалыс теңдеулері
- Лагранж және Гамильтон функциялары
- Период бойынша орташалау
- Бұрыштық жылдамдық және Эйлер бұрыштары
- Перигелийдің абсолютті ығысуы
- Жуықтаудың шектеулері

Керр өрісіндегі сынақ денесінің Лагранж функциясы

Метриканың айқын түрінен ($L = -mc\,ds/dt$):

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{Gm_0m}{r} + \frac{mv^4}{8c^2} + \frac{3Gm_0mv^2}{2c^2r} - \frac{G^2m_0^2m}{2c^2r^2} - \frac{GmJ^2}{c^2m_0r^3}P_2(\cos\theta) - \frac{4G\left(\vec{v}\cdot\left[\vec{r},\vec{J}\right]\right)}{c^2r^3} \quad (1)$$

Сынақ денесінің жылдамдығы:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{\sin^2\theta\, d\phi^2}{dt^2}\right) \quad (2)$$

Бұл сызықтық жылдамдық түрін **тек гармониялық және изотроптық** координаттарда ғана қолдануға болады.

Гамильтон функциясы

Анықтама:

$$H = (\vec{p} \cdot \vec{v}) - L \tag{3}$$

Жалпыланған импульс $\vec{p} = \partial L / \partial \vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{mv^2}{2c^2}\vec{v} + \frac{3Gm_0 m}{c^2 r}\vec{v} - \frac{4G}{c^2 r^3}[\vec{r}, \vec{J}] \tag{4}$$

Сызықтық жылдамдық:

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\vec{p} - \frac{3Gm_0}{c^2 r}\vec{p} + \frac{4G}{c^2 r^3}[\vec{r}, \vec{J}]\right) \tag{5}$$

(1)–(5) ескеріп гамильтонианды жазамыз:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{Gm_0 m}{r} - \frac{p^4}{8c^2m^3} - \frac{3Gm_0 p^2}{2c^2 mr} + \frac{G^2 m_0^2 m}{2c^2 r^2} + \frac{GmJ^2}{c^2 m_0 r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{2G(\vec{p} \cdot [\vec{r}, \vec{J}])}{c^2 r^3} \tag{6}$$

Айналу периоды бойынша орташалау

Адиабаталық теорияға сәйкес (6)-ның әр мүшесін T период бойынша орташалау керек:

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f\ dt \qquad (7)$$

$$M = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \qquad (8)$$

Кеплер есебінің шешімін қолданып, t-дан φ-ге көшеміз:

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}, \qquad 0 < \varphi \leq 2\pi \qquad (9)$$

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi)\frac{dt}{d\varphi}d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, r^2 d\varphi \qquad (10)$$

e — эксцентриситет, P — жарты фокустық қашықтық, φ — полярлық бұрыш.

Орбита жазықтығында

$$\vec{r} = r(\vec{\imath}\cos\varphi + \vec{\jmath}\sin\varphi) \qquad (11)$$

$$\vec{v} = \frac{M}{mP}\left(-\vec{\imath}\sin\varphi + \vec{\jmath}\,(e + \cos\varphi)\right) \qquad (12)$$

Орталық дененің айналу бағытын $\vec{J} = J\vec{k}_0$ (z_0 осі) деп аламыз. Экваторлық емес орбитада $\vec{M}$ мен $\vec{J}$ бағыттары сәйкес келмейді.

Орташаланған гамильтониан

Эллипстік орбита параметрлері адиабаталық инвариант M_0 арқылы:

$$P = \frac{M^2}{m\alpha} = a(1-e^2), \qquad e = \sqrt{1-\frac{M^2}{M_0^2}}, \qquad T = \frac{2\pi M_0^3}{m\alpha^2} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \tag{13}$$

Гамильтон функциясын орташаласақ:

$$\begin{aligned}\overline{H} = \quad & mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{c^2 M_0^3 M} + \frac{2m^2\alpha^4}{c^2 m_0 M_0^3 M^3}\left(\vec{J}\cdot\vec{M}\right) \\ & + \frac{15m\alpha^4}{8c^2 M_0^4} + \frac{m^3\alpha^4}{4c^2 m_0^2 M_0^3 M^3}\left(J^2 - \frac{3\left(\vec{J}\cdot\vec{M}\right)^2}{M^2}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Орташаланған гамильтониан адиабаталық инвариант M_0 мен орбитаның бұрыштық моменті $\vec{M}$-ге тәуелді: $\overline{H} = \overline{H}\left(M_0, \vec{M}\right)$.

Орбитаның айналу бұрыштық жылдамдығы

$\vec{\Omega} = \partial\overline{H}/\,\partial\vec{M}$ бойынша, $\vec{M} = M\vec{e}_M, \vec{J} = J\vec{e}_J$ белгілеулерімен:

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M^2}\vec{e}_M + \frac{2m^2\alpha^4 J}{c^2m_0M_0^3M^3}\left(\vec{e}_J - 3\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)\vec{e}_M\right) - \frac{3m^3\alpha^4J^2}{4c^2m_0^2M_0^3M^4}\left(2\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)\vec{e}_J + \left(1 - 5\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)^2\right)\vec{e}_M\right) \quad (15)$$

Шварцшильд мүшесі

$\sim m_0$: орталық дене массасынан туатын кеңістік-уақыт қисаюы

Лензе–Тирринг мүшесі

$\sim J$: айналатын дененің координаталық торды тартуы

Квадрупольдік мүше

$\sim J^2$: бұрыштық импульстің екінші реті

Эйлер бұрыштары арқылы талдау

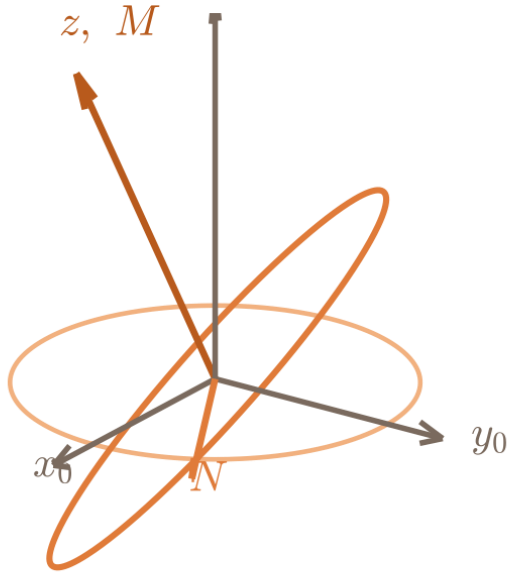
Орбита қатты дене ретінде айналады. δ — прецессия, g — меншікті айналу, i — орбитаның көлбеулігі:

$$\vec{\Omega} = \dot{\delta}\,\vec{e}_{z_0} + i\,\vec{e}_{\delta} + \dot{g}\,\vec{e}_z \qquad (16)$$

(15) мен (16)-ны салыстырсақ: $i = 0$ (17) және

$$\dot{\delta} = \frac{2m^2\alpha^4 J}{c^2 m_0 M_0^3 M^3} - \frac{3m^3\alpha^4 J^2}{2c^2 m_0^2 M_0^3 M^4}\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right) \qquad (18)$$

$$\dot{g} = \frac{3m\alpha^4}{c^2 M_0^3 M^2} - \frac{6m^2\alpha^4 J}{c^2 m_0 M_0^3 M^3}\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right) - \frac{3m^3\alpha^4 J^2}{4c^2 m_0^2 M_0^3 M^4}\left(1 - 5\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right)^2\right) \qquad (19)$$



$\vec{e}_z \parallel \vec{M}$, $\vec{e}_{z_0} \parallel \vec{J}$; i — $\vec{J}$ мен $\vec{M}$ арасындағы бұрыш

$i = 0$: орбиталардың көлбеулігі уақыт өте **өзгермейді**.

Перигелийдің абсолютті ығысуы

(18)–(19) интегралдап, $\Delta g_{\text{abs}} = \Delta g + \Delta\delta$ (20) табамыз:

$$\Delta g_{\text{abs}} = \frac{6\pi\alpha^2}{c^2M^2} + \frac{4\pi m\alpha^2 J}{c^2 m_0 M^3}\left(1 - 3\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right)\right) - \frac{3\pi m^2\alpha^2 J^2}{2c^2 m_0^2 M^4}\left(1 + 2\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right) - 5\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right)^2\right) \quad (21)$$

Экваторлық жазықтықта $\vec{e}_J \parallel \vec{e}_M$:

$$\Delta g_{\text{abs}} = \frac{6\pi\alpha^2}{c^2M^2} - \frac{8\pi m\alpha^2 J}{c^2 m_0 M^3} + \frac{3\pi m^2\alpha^2 J^2}{c^2 m_0^2 M^4} \quad (22)$$

(13) бойынша P арқылы:

$$\Delta g_{\text{abs}} = \frac{6\pi G m_0}{c^2 P} - \frac{8\pi G^{1/2} J}{c^2 m_0^{1/2} P^{3/2}} + \frac{3\pi J^2}{c^2 m_0^2 P^2} \quad (23)$$

Экваторлық емес орбита үшін перигелий ығысуының орбита көлбеулігіне айқын тәуелділігін ескеру қажет.

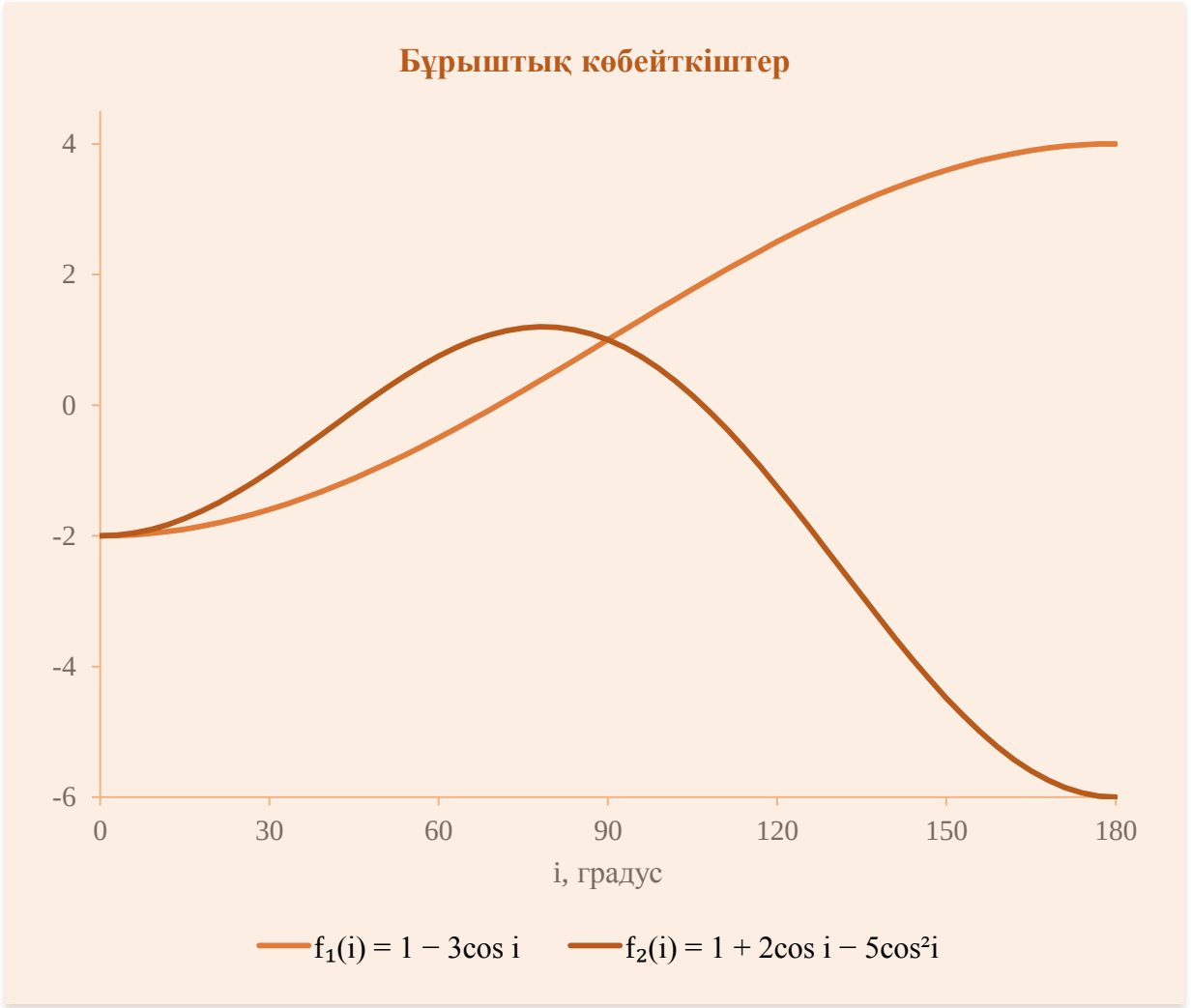
Көлбеулікке тәуелділік және суперпозиция

(21)-дегі бұрыштық көбейткіштер $\cos i = \vec{e}_J \cdot \vec{e}_M$ арқылы өрнектеледі:

- $f_1(i) = 1 - 3\cos i$ — Лензе–Тирринг мүшесі;
- $f_2(i) = 1 + 2\cos i - 5\cos^2 i$ — J^2 мүшесі.

Суперпозиция принципі

Мүше	Тәуелділік	Мағынасы
1-мүше	m_0	Шварцшильд
2-мүше	J	Лензе–Тирринг
3-мүше	J^2	екінші ретті түзету



Қорытынды

- Керр өрісіндегі сынақ денесінің L және H функциялары гармониялық координаттардағы метрикадан алынды.
- Период бойынша орташалау $\overline{H}(M_0, \vec{M})$ береді, ал $\vec{\Omega} = \partial\overline{H} / \partial\vec{M}$ — орбитаның айналу жылдамдығы.
- Эйлер бұрыштары бойынша: $i = 0$, прецессия $\dot{\delta}$ және перигелий айналуы $\dot{g}$ табылды.
- Перигелийдің абсолютті ығысуы үш мүшеден тұрады: Шварцшильд, Лензе–Тирринг және J^2 түзетуі — суперпозиция принципі орындалады.

Логикалық тізбек



Пайдаланылған әдебиеттер

1. Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ университеті, 2006. – 132 с.