Дәріс 2

Жалпы салыстырмалылық теориясындағы денелер механикасының бірінші жуықтауының метрикасы

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: Эйнштейн теңдеулерінен бастап, гармониялық координаталарда денелер механикасының бірінші жуықтауының метрикасын (Фок метрикасын) алу және оны нақтылау.

Бірінші жуықтау метрикасы әлсіз гравитациялық өрістер мен төмен жылдамдықтарда жұмыс істейді, классикалық механикаға сәйкес келеді және гравитациясыз жағдайда арнайы салыстырмалық теориясына көшеді.

Нәтижесінде Эйнштейн тұрақтысы $\chi = 8\pi\gamma/c^2$ мен нақтыланған Фок метрикасы алынады.

Дәріс жоспары

- Бірінші жуықтау метрикасының маңызы
- Эйнштейн теңдеулері, Риччи тензоры
- Индекстерді көтеру және төмендету
- Д'Аламбер операторы
- Гармониялық координаталар
- Шексіздіктегі шекаралық шарттар
- Ньютондық жуықтау, χ тұрақтысы
- Фок метрикасы
- Нақтыланған метрика

Бірінші жуықтау метрикасының маңызы

1 Гравитациялық өрістердің сипаттамасы

Планеталар, жұлдыздар, қара құрдымдар сияқты массивтік нысандар маңындағы өрістерді сипаттайды: нысан кеңістік-уақытты қалай қисайтатынын көрсетеді.

2 Денелердің қозғалысы

Өрістегі денелердің қозғалыс теңдеулерін береді: жұлдыз маңындағы планеталар орбиталарын, қара құрдым маңындағы заттардың қозғалысын болжауға мүмкіндік береді.

3 Гравитациялық әсерлер

Уақыттың баяулауы, спектрлік сызықтардың ығысуы сияқты эффектілерді сипаттайды — олар тәжірибеде расталған.

Қолдану шегі: әлсіз өріс және $v \ll c$. Бұл — нақты кеңістік-уақыт метрикасының жуықтауы; ол ғаламға қатысты физикалық құбылыстарды талдау мен болжаудың маңызды құралы.

Эйнштейн теңдеулері және Риччи тензоры

Денелер механикасын Эйнштейн теңдеулерінен бастаймыз [1]:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\chi T^{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 0,1,2,3 \tag{1}$$

мұндағы Риччи тензоры:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \tag{2}$$

$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ — Кристоффель символынан алынған шама:

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \tag{4}$$

Кристоффель символдары

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \tag{3}$$

- (2)-нің соңғы мүшесі екінші туындыларды қамтымайды — ол $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$-ның біртекті квадраттық функциясы.
- Екінші туындылар бірінші мүшеге және $\Gamma^{\mu\nu}$ шамасына кіреді.

Индекстерді көтеру және төмендету

Индекстерді көтеру және төмендету — тензорлардың контравариантты және ковариантты компоненттері арасында ауысуға мүмкіндік беретін маңызды операция. Ол үшін $g_{\mu\nu}$ метрикасы қолданылады.

Контравариантты

Индексі жоғарыда: V^{μ}. Координат осьтеріне қарама-қарсы түрленеді.

Ковариантты

Индексі төменде: V_{μ}. Координат осьтерімен бірдей түрленеді.

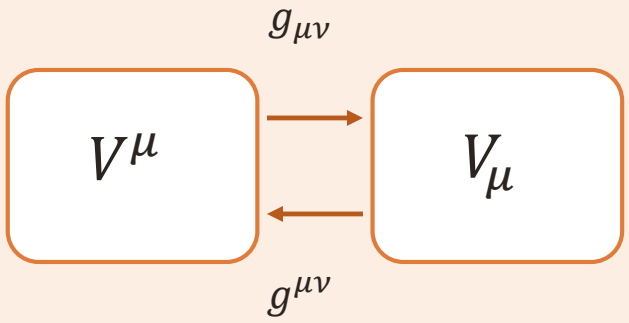
Төмендету:

$$T_{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\nu} \quad (5)$$

Көтеру:

$$S^{\mu} = g^{\mu\nu} S_{\nu} \quad (6)$$

Схема



Қайталанатын индекс бойынша қосынды алынады — индекс метрика арқылы «жиырылады».

Бұл есептеулерді ыңғайлы белгілеумен жүргізуге мүмкіндік береді.

Д'Аламбер операторы және Γ шамалары

Кристоффель символдарының жиырылуы:

$$\Gamma^{\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \tag{7}$$

Кез келген Ψ функциясы үшін д'Аламбер операторы:

$$\Box\Psi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\nu}} \tag{8}$$

$$\Box\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\alpha}}\right) \tag{9}$$

Осыдан:

$$\Gamma^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\right) = -\Box x^{\alpha} \tag{10–11}$$

Не үшін маңызды?

Γ^{α} шамалары координаталардың өзінен алынған д'Аламбер операторымен өрнектеледі.

Демек, координаталарды $\Box x^{\alpha} = 0$ болатындай таңдасақ, $\Gamma^{\alpha} = 0$ болады.

Бұл Эйнштейн теңдеулерін толқындық түрге келтіреді.

Гармониялық координаталар

$\Gamma^{\mu\nu}$ шамалары Γ^{ν}-дің контравариантты туындыларының жартылай қосындысы ретінде алынады:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla^{\mu}\Gamma^{\nu} + \nabla^{\nu}\Gamma^{\mu}) \tag{12}$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}\right) \tag{13}$$

Егер x_0, x_1, x_2, x_3 координаталарының әрқайсысы $\Box x^{\alpha} = 0$ теңдеуін қанағаттандырса:

$$\Gamma^{\nu} = 0 \tag{14}$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0 \tag{15}$$

Мұндай координаталар жүйесі **гармониялық** деп аталады.

Тарихи ескерту

$\Gamma^{\nu} = 0$ шарттарын алғаш рет де Дондер [2] және Ланчос [3] енгізді.

Ғылыми әдебиетте ол **Фоктың гармониялық координаталар жүйесі** деген атаумен кең тарады.

$\Gamma^{\mu\nu}$ — вектор емес, ал Γ^{ν} — тензор емес; бірақ олар Эйнштейн теңдеулерін қарапайым түрге келтіреді.

Шексіздіктегі шекаралық шарттар

Массалардың **аралдық таралуы** кезінде шексіздікте гравитациялық өріс нөлге ұмтылады: жеткілікті үлкен қашықтықта геометрия псевдоевклидтік болады. Галилей координаталарында:

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (16)$$

$x_0 = t,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ (17) белгілеулерімен:

$$ds^2 = c^2dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (18)$$

Оны жалпы өрнекпен $ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$ (19) салыстырсақ:

Шексіздікте	00	0i	ik
ковариантты (20)	c^2	0	$-\delta_i$□
контравариантты (21)	$1/c^2$	0	$-\delta_i$□



Массалар аралынан алыста метрика галилейлік мәндерге ұмтылады

Бұл шарттарға $g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_\infty$ айырмасының асимптотикасы қосылуы керек.

Массалардан алыс аймақтағы теңдеулер

$\Gamma^{\nu} = 0$ шартында Эйнштейн теңдеулері толқындық типке келеді. Массалардан тыс аймақта $T^{\mu\nu} = 0$:

$$R^{\mu\nu} = 0 \qquad (22)$$

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \qquad (23)$$

Үлкен қашықтықта $g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_\infty \sim 1/r, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; квадраттық мүше $\sim 1/r^2$ болып ескерілмейді:

$$R^{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_3^2} \right) \qquad (24)$$

Асимптотика

- Өріс шексіздікте нөлге ұмтылады.
- Бірінші және екінші туындылар да $1/r$ сияқты кемиді.
- Д'Аламбер операторының коэффициенттерін олардың шекті мәндерімен алмастыруға болады.

Нәтижесінде (24) — жазық кеңістіктегі толқындық оператор.

Ньютондық жуықтаумен салыстыру

Алдымен Эйнштейн теңдеулеріне кіретін χ тұрақтысын анықтау керек:

$$R^{\mu\nu} = -\chi\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \qquad R = \chi T \tag{25–26}$$

Мәнін Ньютон жуықтауындағы интервал квадратымен салыстырып табамыз:

$$ds^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{27}$$

$$U = \gamma \int \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dx'dy'dz' \tag{28}$$

U — Эйнштейн теңдеулерін жуық шешу арқылы алынған Ньютон потенциалы.

Серпімді дененің массалық тензоры

$$\begin{aligned} c^2T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right) \\ c^2T^{0i} &= \rho v_i + \cdots \\ c^2T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik} \end{aligned} \tag{29}$$

ρ — массаның тығыздығы, v_i — жылдамдық құраушылары, Π — масса бірлігінің серпімділік энергиясы, p_{ik} — кернеу тензоры.

Жуықтауымызда: $c^2T^{00} = \rho$, $c^2T^{0i} = \rho v_i$, $T = \rho$ (31–32).

Квазистатикалық шешім

$g^{\mu\nu}$-дің галилейлік мәндерін қолданып, (25)-тің оң жағын есептейміз:

$$T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T = \frac{\rho}{2c^2}, \qquad T^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} T = \frac{\rho v_i}{c^2}$$
$$T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T = \frac{1}{2} \rho\, \delta_{ik} \tag{33}$$

Гармониялық координаталарда (24) бойынша:

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2} \tag{34}$$

Уақыт бойынша екінші туындыларды тастап, (25)-ке қойсақ:

$$\Delta g^{00} = -\frac{\chi}{c^2} \rho, \quad \Delta g^{0i} = -\frac{2\chi}{c^2} \rho v_i, \quad \Delta g^{ik} = -\chi \rho\, \delta_{ik} \tag{35}$$

Түсініктеме

Δ — кәдімгі евклидтік Лаплас операторы.

Бізді квазистатикалық шешім қызықтырады, сондықтан $\partial^2 / \partial t^2$ мүшелері алынып тасталады.

(35) — метриканың әр құраушысы үшін Пуассон типті теңдеулер: көздері — тығыздық пен импульс тығыздығы.

Эйнштейн тұрақтысын анықтау

Ньютондық жуықтауда (27) бойынша:

$$g_{00} = c^2 - 2U \quad (36)$$

$$g_{00}g^{00} + g_{0i}g^{i0} = 1 \quad (37)$$

$g_{0i}g^{i0}$ бірмен салыстырғанда өте аз, сондықтан $g_{00}g^{00} = 1$ (38), және

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4} \quad (39)$$

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho \quad (40)$$

Демек $\Delta g^{00} = -8\pi\gamma\rho/c^2$ (41) және (35)-пен салыстырсақ:

$$\chi = \frac{8\pi\gamma}{c^2} \quad (42)$$

Нәтиже

Эйнштейннің ауырлық тұрақтысы χ Ньютонның гравитациялық тұрақтысы γ арқылы өрнектеледі.

U — (40) Пуассон теңдеуінің шексіздікте шекті шарттарды қанағаттандыратын шешімі, яғни (28).

Бұл ЖСТ-ның Ньютон теориясымен сәйкестігін көрсетеді.

Гравитациялық вектор-потенциал

Ньютондық потенциалмен қатар электродинамикадағы вектор-потенциалға ұқсас функцияларды енгіземіз:

$$U_i = \gamma \int \frac{(\rho v_i)'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dx'dy'dz', \qquad \Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \tag{43–44}$$

Сонда (35) теңдеулерінің шешімдері (χ мәнін (42)-ден қойып):

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^4} U_i \\ g^{ik} &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} \end{aligned} \tag{45}$$

Шамалардың реті

$v \sim q$ — жарық жылдамдығымен салыстырғанда аз шама.

Шама	Өлшемі	Реті
U	$[v^2]$	q^2
U_i	$[v^3]$	q^3

Ковариантты құраушыларды алгебралық жолмен — анықтауыштың алгебралық толықтауыштары (46–47) арқылы табуға болады.

Ковариантты құраушылар және Фок метрикасы

g_{0i} үшін қатынастарды қолданамыз:

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \tag{48}$$

$$g_{0\sigma}g^{\sigma i} = \delta_{0}^{i} = 0 \tag{49}$$

$$g_{00}g^{0i} + g_{0k}g^{ki} = 0 \tag{50}$$

Бұдан:

$$c^2 g^{0i} = g_{0i} = \frac{4U_i}{c^2} \tag{51}$$

$$g_{ik} = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} \tag{52}$$

Фок бойынша бірінші жуықтау метрикасы ([1], 271 б.)

$$ds^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt \tag{53}$$

Фок метрикасына ескертпелер және g_{00} түзетуі

Үш мәселе

1. g_{00}-де релятивистік қосымша жоқ, ал g_{ik} мен g_{0i}-де бар. Себебі Фок χ тұрақтысы мен бірінші жуықтауды бір мезгілде анықтады; бұл есептерді бөліп қарау керек.

2. (53)-ті центрлік-симметриялы өріске қолданғанда перигелий ығысуының дұрыс өрнегі алынбайды.

3. Шоғырланған жүйе үшін ($U\,dt^2 \sim dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$) g_{00} мен g_{ik} түзетулерінің реттері бірдей болуы керек.

g_{00} түзетуін анықтаймыз:

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4} + \frac{\Phi}{c^6} \qquad (54)$$

Φ — белгісіз функция. R^{00} теңдеуінен (55–60) оған арналған теңдеу шығады:

$$\Delta(\Phi - 2U^2) = -8\pi\gamma\left[\rho\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) - p_{kk}\right] \qquad (61)$$

Шешімі:

$$\Phi = 2U^2 + 2\gamma\int \frac{\rho'\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right)'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}(dx')^3 - 2\gamma\int \frac{p'_{kk}(dx')^3}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (62)$$

Нақтыланған Фок метрикасы

Метрикалық тензордың сәйкес ковариантты компоненті (63) ескерілсе, бірінші Фок жуықтауының нақтыланған метрикасы [4]:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2}\int \frac{\rho'\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right)' - p'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}(dx')^3\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt \quad (64)$$

Ньютон интервалы:

$$ds^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad (65)$$

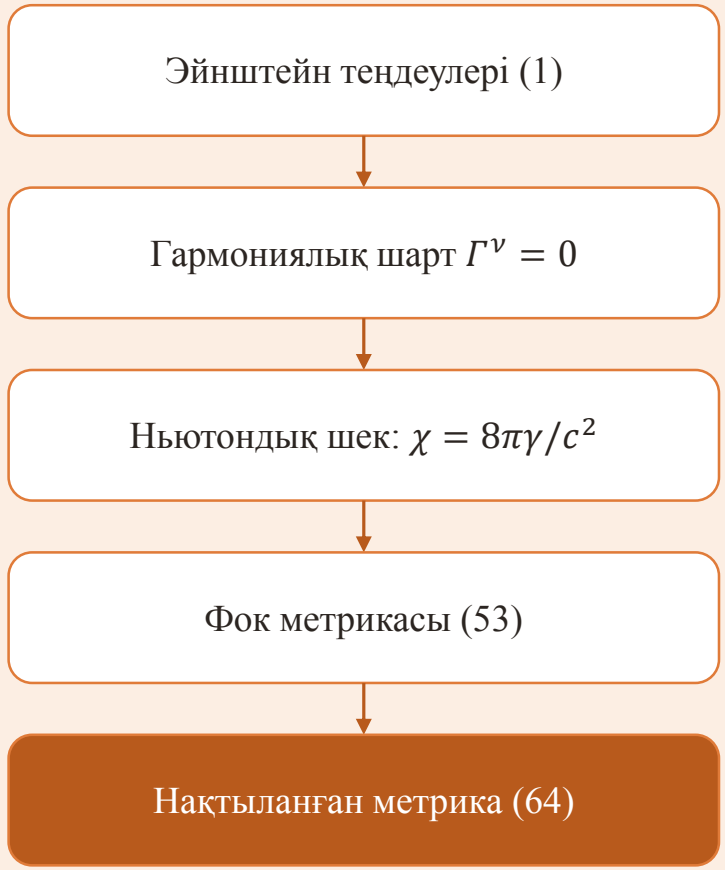
ЖСТ-дағы бірінші жуықтау ($\sim 1/c^2$) Ньютон болжамдарынан бас тартуды талап етеді.

Қасиет	Ньютон	ЖСТ (64)
Өріс сызықтылығы	сызықты	сызықты емес
3-өлшемді кеңістік	евклидтік	қисық
Векторлық өріс	жоқ	ішкі құрылым, айналу

Қорытынды

- Эйнштейн теңдеулері гармониялық координаталарда ($\Gamma^\nu = 0$) толқындық түрге келеді.
- Шексіздіктегі шекаралық шарттар: метрика галилейлік мәндерге ұмтылады.
- Ньютондық жуықтаумен салыстыру Эйнштейн тұрақтысын береді: $\chi = 8\pi\gamma/c^2$.
- Скаляр U және вектор U_i потенциалдары арқылы Фок метрикасы (53) алынады.
- g_{00} құраушысын $1/c^4$ дәлдікпен нақтылау (64) метрикасына әкеледі — ол перигелий ығысуын дұрыс береді.

Логикалық тізбек



Пайдаланылған әдебиеттер

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1961. – 564 с.

2. Фок В.А. Квантовая физика и философские проблемы // Физическая наука и философия. – М.: Наука, 1973. – С. 55–77.

3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 1. Теория систем отношений. – М.: Изд-во МГУ, 1996. – 264 с.

4. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 448 с.