ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Дәріс 9

ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаталық теориясы

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: ЖСТ механикасындағы эволюциялық қозғалысты зерттейтін адиабаталық теорияның математикалық негізін тұжырымдау және оны Шварцшильд есебіне қолдану.

ЖСТ механикасының көптеген есептерін баяу эволюцияланатын гамильтондық жүйе, яғни **ұйытқыған Кеплер есебі** ретінде қарастыруға болады.

Нәтиже: қозғалыс теңдеулерін шешпей-ақ Эйнштейннің перигелий формуласын алу.

Дәріс жоспары

- Адиабаталық теорияның әдістері
- Ұйытқыған Кеплер есебі: L және H
- Векторлық элементтердің қозғалыс теңдеулері
- Бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$
- Адиабаталық инвариант M_0
- Шварцшильд есебі
- Кеплер есебімен салыстыру

Адиабаталық теорияның әдістері

ЖСТ механикасындағы эволюциялық қозғалысты зерттеу үш әдіске негізделген:

1 Векторлық элементтер

Импульс моменті $\vec{M}$ және Лаплас векторы $\vec{A}$ — орбитаның кеңістіктегі пішіні мен бағдарын толық сипаттайды.

2 Асимптотикалық әдістер

Сызықты емес тербелістер теориясының әдістері: жылдам айнымалылар бойынша орташалау.

3 Адиабаталық инварианттар

Баяу эволюция кезінде сақталатын шамалар — қозғалыстың «жадын» сақтайды.

Осы әдістердің арқасында ЖСТ механикасының бірқатар есептері **баяу эволюцияланатын гамильтондық жүйе** — ұйытқыған Кеплер есебі ретінде шешіледі.

Ұйытқыған Кеплер есебі

Лагранж функциясы:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{\gamma m m_0}{r} + R(\vec{r}, \vec{v}) \quad (1)$$

Гамильтониан:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma m m_0}{r} - R(\vec{r}, \vec{p}) \quad (2)$$

- $R \sim 1/c^2$ — пертурбация (ұйытқу) функциясы;
- $\vec{p} = \partial L / \partial \vec{v}$ — импульс;
- қозғалыс $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтерімен сипатталады.

Құрылымы

Алғашқы үш мүше — релятивистік емес Кеплер есебі (нөлдік жуықтау).

R — $1/c^2$ ретті аз түзету: Кеплер эллипсін бұзбайды, тек оның элементтерінің баяу эволюциясын тудырады.

Векторлық элементтердің қозғалыс теңдеулері

Векторлық элементтердің физикалық сипаттамаларына байланысты қозғалыс теңдеуінің жалпы түрі:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right] \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\vec{e}_A + \left[\vec{\Omega}, \vec{A}\right] \quad (4)$$

$\vec{e}_M$, $\vec{e}_A$ — бірлік векторлар. Белгісіз бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$ жүйенің физикалық күйіне байланысты:

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} \quad (5)$$

Орташаланған гамильтониан

$\overline{H}$ — кеплерлік қозғалыс бойынша орташаланған гамильтониан.

Ол векторлық элемент $\vec{M}$-нің және жүйенің адиабаталық инвариантының функциясы.

$\vec{\Omega}$-ны анықтау (3)–(4) теңдеулерін шешпей-ақ көптеген релятивистік эффектілерді есептеуге мүмкіндік береді.

Адиабаталық инвариант және негізгі теңдеулер

Жүйенің адиабаталық инварианты:

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}}, \qquad \alpha = \gamma m m_0 \tag{6}$$

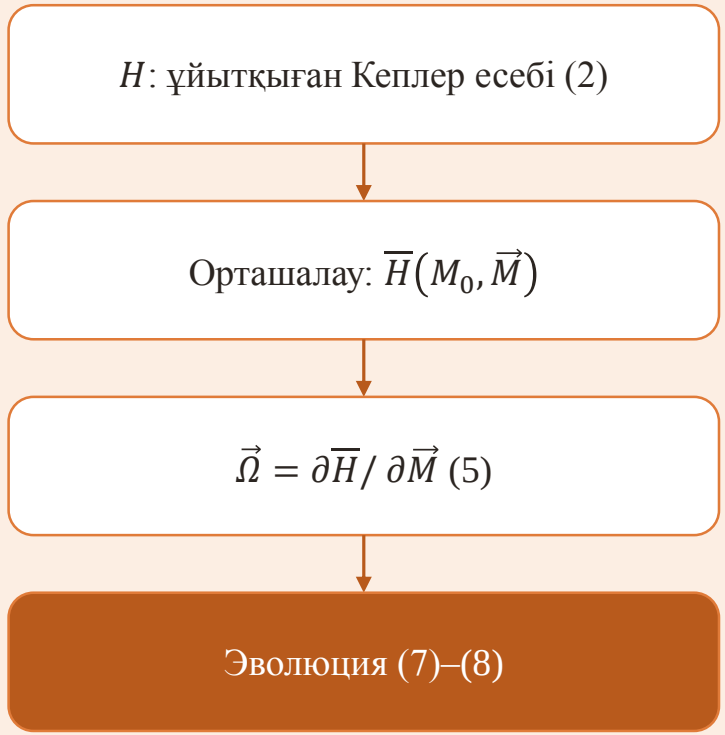
Инвариантты ескерсек, (3)–(4) теңдеулері:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right] \tag{7}$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = \left[\vec{\Omega}, \vec{e}_A\right] \tag{8}$$

(7), (8) теңдеулері мен (5) қатынасы — ЖСТ механикасындағы **адиабаталық теорияның** математикалық негізі.

Әдіс схемасы



Квазикеплер есебінің эволюциясы толық шешіледі.

Шварцшильд есебі

Адиабаталық теория тұрғысынан қозғалыс теңдеулері қарапайым:

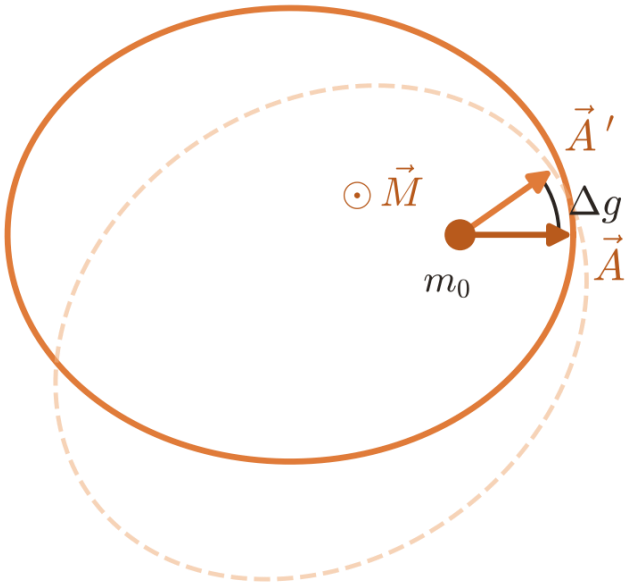
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{A}] \tag{19}$$

Гамильтонның орташа мәні:

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 Mc^2} \tag{20}$$

Бұрыштық жылдамдық:

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2}\vec{M} = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2 T c^2}\vec{e}_M \tag{21}$$



$\vec{A}$ векторы $\vec{M}$ маңында $\vec{\Omega}$ жылдамдықпен айналады

$\overline{H}$-ның M-ге тәуелді жалғыз мүшесі ғана $\vec{\Omega}$-ны береді.

Перигелийдің ығысуы: Эйнштейн формуласы

T периоды бойынша перигелийдің ығысуы:

$$\Delta g = \Omega T = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2c^2} = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2} \tag{22}$$

Біз тағы да әйгілі Эйнштейн формуласын алдық — бұл жолы $\overline{H}$-ның $\vec{M}$ бойынша туындысы арқылы.

Шварцшильд есебі

$\overline{H} = \overline{H}(M_0, M)$ — гамильтонианда орбиталық моментке тәуелділік бар ⇒ перигелий айналады.

Кеплер есебі

$\overline{H} = \overline{H}(M_0)$ — тек инвариантқа тәуелді ⇒ $\vec{\Omega} = 0$, перигелий қозғалмайды.

Кеплер есебі: орташа қозғалыс

Классикалық механикада, яғни Кеплер есебінде, гамильтониан тек жүйенің M_0 инвариантына тәуелді. Оның туындысы:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial M_0} = \frac{m\alpha^2}{M_0^3} = \frac{2\pi}{T} \qquad (23)$$

— бұл **орташа қозғалыс** деп аталады (орбита бойындағы орташа бұрыштық жылдамдық).

Туынды	Нәтиже	Мағынасы
$\partial\bar{H}/\partial M_0$	$2\pi/T$	орбита бойымен қозғалыс
$\partial\bar{H}/\partial \vec{M}$	$\vec{\Omega}$	орбитаның айналуы (перигелий)

Канондық құрылым

M_0 мен $\vec{M}$ — «әрекет» айнымалылары.

Олардың әрқайсысына $\overline{H}$-ның туындысы ретінде жиілік сәйкес келеді.

Жылдам жиілік — $2\pi/T$, баяу жиілік — $\Omega \sim 1/c^2$.

Бұл — сызықты емес тербелістер теориясындағы адиабаталық жуықтаудың мәні.

Қорытынды

- ЖСТ механикасының есептері ұйытқыған Кеплер есебі ретінде қарастырылады: $R \sim 1/c^2$.
- Адиабаталық теорияның негізі — (7), (8) теңдеулері және $\vec{\Omega} = \partial\overline{H}/\partial\vec{M}$ қатынасы.
- Адиабаталық инвариант $M_0 = M/\sqrt{1 - A^2/\alpha^2}$.
- Шварцшильд есебінде перигелий ығысуы гамильтонианның M-ге тәуелділігінен туады — Эйнштейн формуласы (22).
- Кеплер есебінде $\overline{H} = \overline{H}(M_0)$, перигелий қозғалмайды; $\partial\overline{H}/\partial M_0 = 2\pi/T$.

Негізгі формулалар

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}}$$

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - A^2/\alpha^2}}$$

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}$$

Келесі дәріс: Лензе–Тирринг мәселесі және адиабаталық теория.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ университеті, 2006. – 132 с.