ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Дәріс 8

Ньютон механикасындағы векторлық элементтер. Квази-Кеплер есебі

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: Ньютон механикасындағы векторлық элементтерді — импульс моменті мен Лаплас векторын — қолданып Кеплер есебін шешу және орталық өрістегі аздап ұйытқыған (квази-кеплерлік) қозғалысты зерттеу.

Бұл тақырып физикада ғана емес, астродинамика, ғарыш ғылымдары және инженерлік қолданбаларда да маңызды.

Алынған формулалар ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаталық теориясының негізі болады.

Дәріс жоспары

- Ньютон механикасы және векторлық элементтер
- Кеплер есебі: $\vec{M}$ және $\vec{A}$
- Конустық қималар, эллипс параметрлері
- Орталық өрістегі қозғалыс
- Тиімді потенциалдық энергия
- Траекторияның тұйықталуы
- Квази-Кеплер есебі
- M_0 интегралы және орташа қозғалыс

Ньютон механикасы мен ЖСТ механикасы

1 Ньютон механикасы

XVII ғ. Ньютон жасаған физиканың іргелі саласы: күш, масса, үдеу ұғымдары арқылы қозғалыс пен өзара әрекеттесуді сипаттайды.

2 Векторлық элементтер

Векторлық алгебра негізінде қозғалысты, күштерді және моменттерді сипаттаудың ыңғайлы құралы.

3 ЖСТ механикасы

Күшті гравитациялық өрістер мен қисық кеңістік-уақыттағы қозғалыс — классикалық механика жарамсыз болатын жағдайлар.

4 Квази-Кеплер есебі

Массивтік аспан денелері маңындағы ғарыш объектілерінің қозғалысын талдауға арналған есептер класы.

Кеплер есебі: қозғалыстың векторлық интегралдары

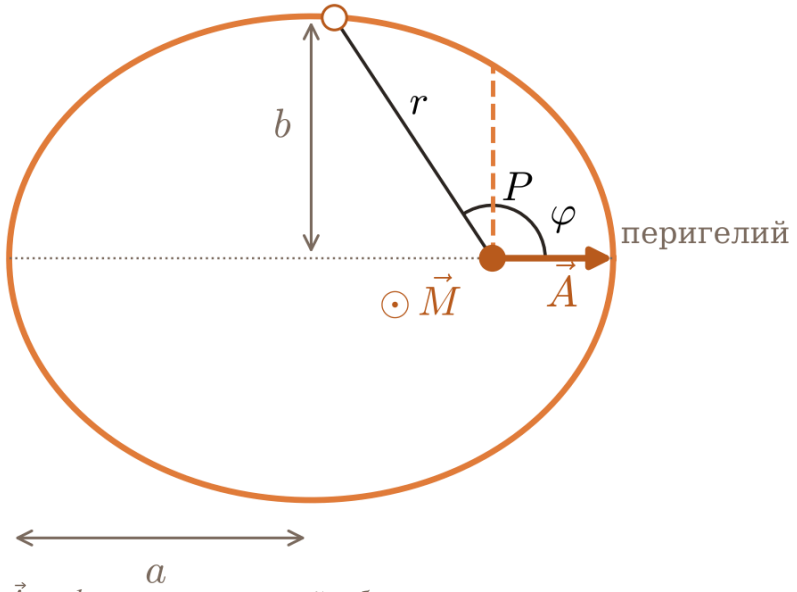
Потенциалдық энергия $\sim 1/r$, күш $\sim 1/r^2$. Есепті екі векторлық интегралдан бастасақ, оңай шешіледі:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}\,], \qquad \vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r} \tag{1}$$

$\vec{M}$ сақталуынан орбита жазық қисық. Лаплас векторын $\vec{r}$-ге скаляр көбейтсек:

$$(\vec{r}\vec{A}) = \left(\vec{r}\left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right]\right) - \gamma m m_0 r \tag{2}$$

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}, \quad P = \frac{M^2}{\gamma m^2 m_0}, \quad e = \frac{A}{\gamma m m_0}, \quad \alpha = \gamma m m_0 \tag{3–4}$$



$\vec{A}$ — фокустан перигелийге бағытталған тұрақты вектор

(3) — фокусы координаттардың бас нүктесінде болатын конустық қиманың теңдеуі. $\vec{A}$ интегралының болуы қозғалыстың азғындауымен байланысты [1].

Эллипстік орбита

Толық энергия $E < 0$ болса, $e < 1$: орбита — эллипс, қозғалыс **финитті**. Жарты осьтер:

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{5}$$

$$E_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2} \tag{6}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \tag{7}$$

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}, \qquad T = \frac{2mf}{M}, \quad f = \pi ab \tag{8}$$

$e = 0$ болғанда эллипс шеңберге айналады. Үлкен жарты ось тек энергияға тәуелді, моментке тәуелсіз.

Конустық қималар

e	Орбита	E
e = 0	шеңбер	E_min
0 < e < 1	эллипс	E < 0
e = 1	парабола	E = 0
e > 1	гипербола	E > 0

Финитті қозғалыс тек $E < 0$ кезінде мүмкін; f — орбитаның ауданы.

Орталық өрістегі қозғалыс

Потенциалдық энергия тек r-ге тәуелді болса, моменті сақталады — траектория бір жазықтықта жатады:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}\,] \tag{9}$$

$$M = mr^2\dot{\varphi} \tag{11}$$

Полярлық координаталарда Лагранж функциясы:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \tag{10}$$

φ — циклдік координата. Энергияның сақталуы:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{13}$$

Есептің шешімі

Қозғалыс теңдеулерін жазбай-ақ, сақталу заңдарына сүйеніп шешуге болады:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} \tag{15}$$

$$\varphi = \int \frac{M\,dr/r^2}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{17}$$

(17) — траектория теңдеуі; φ монотонды өзгереді.

Тиімді потенциалдық энергия

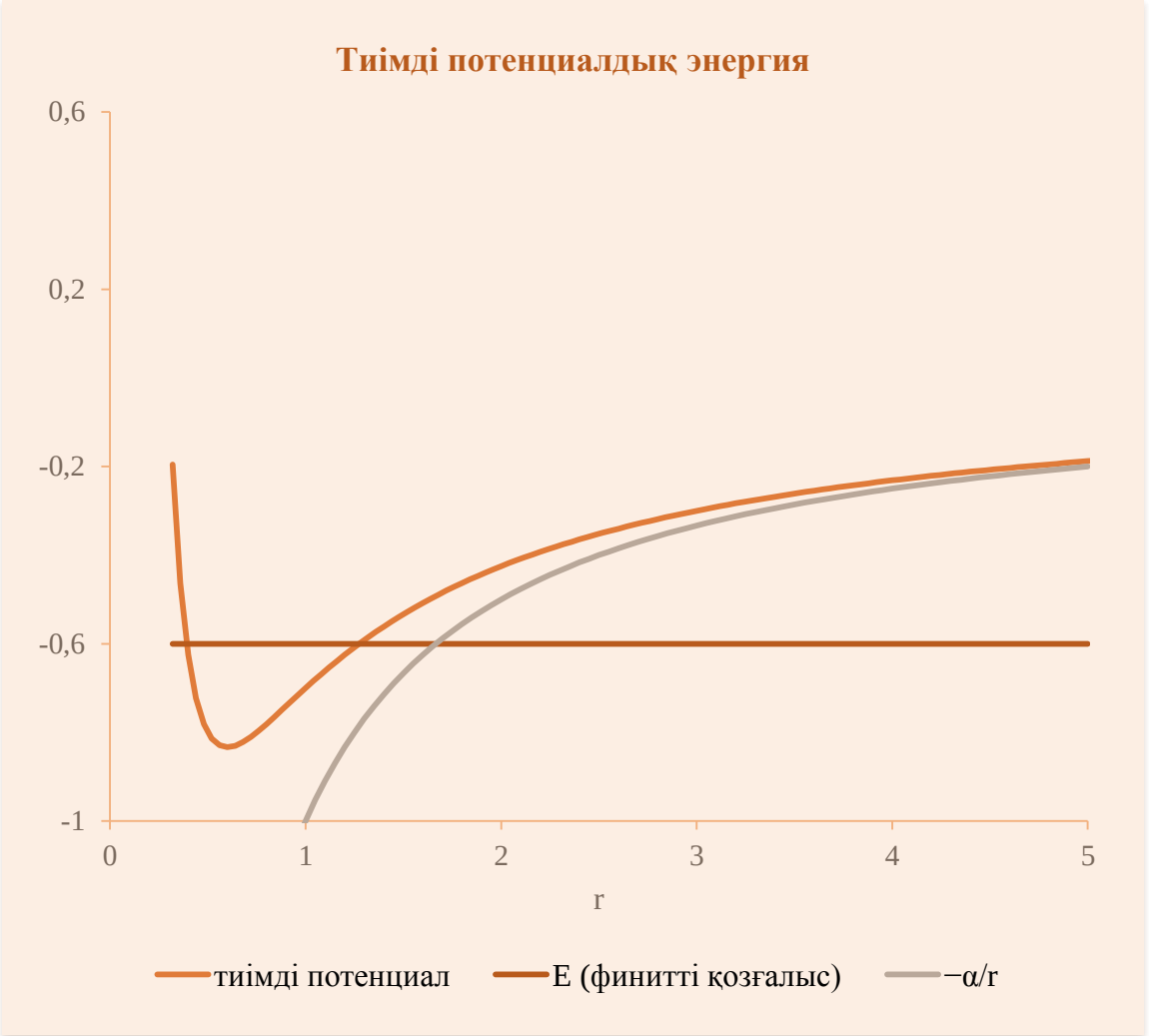
Радиалдық қозғалыс — тиімді потенциалдағы бір өлшемді қозғалыс:

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad (18)$$

$M^2/(2mr^2)$ — центрден тепкіш энергия. Бұрылу нүктелері:

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \qquad (19)$$

Екі шекара $r_{\min}$, $r_{\max}$ болса, қозғалыс финитті: траектория радиустары $r_{\min}$ мен $r_{\max}$ шеңберлер арасындағы сақинада жатады — бірақ міндетті түрде тұйық емес.



Траекторияның тұйықталуы

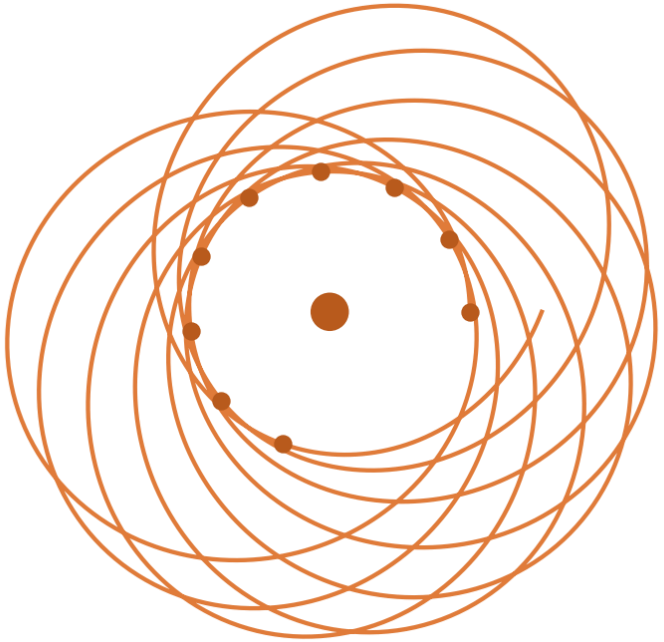
r мәні $r_{\min}$-нен $r_{\max}$-ке және кері өзгергенде радиус-вектор $\Delta\varphi$ бұрышқа бұрылады:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M\,dr/r^2}{\sqrt{2m(E-U)-\dfrac{M^2}{r^2}}} \qquad (20)$$

Траектория тұйық болу шарты — бұрыш 2π-дің рационал бөлігі:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$$

Барлық финитті траекториялары тұйық болатын тек екі өріс бар: $U \sim 1/r$ (Кеплер есебі) және $U \sim r^2$ (кеңістіктік осциллятор).



Тұйық емес траектория: перигелий әр айналымда ығысады

Квази-Кеплер есебі

Потенциалдық энергия Кеплер мүшесі мен аз қосымшадан тұрады:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r) \tag{21}$$

Финитті траекториялар тұйықталмайды: әр айналымда перигелий $\delta\varphi$ бұрышқа ығысады. (20)-ны түрлендірсек:

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}\, dr \tag{22}$$

δU бойынша жіктеп (23), dr-дан $d\varphi$-ге көшсек:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\, \delta U(r)\, d\varphi\right) \tag{24}$$

Жіктеу (23)

Түбір астындағы өрнекті δU бойынша бірінші ретке дейін жіктейміз:

$$\approx \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} - \frac{m\,\delta U}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

Нөлдік мүше 2π береді (Кеплер эллипсі тұйық), ал δU-ге пропорционал мүше — перигелийдің ығысуын.

Интегралдау «ұйытқымаған» Кеплер траекториясы бойынша жүргізіледі.

Перигелийдің айналу жылдамдығы

(24) және (16) $d\varphi = \frac{M}{mr^2}\,dt$ (25) ескерсек:

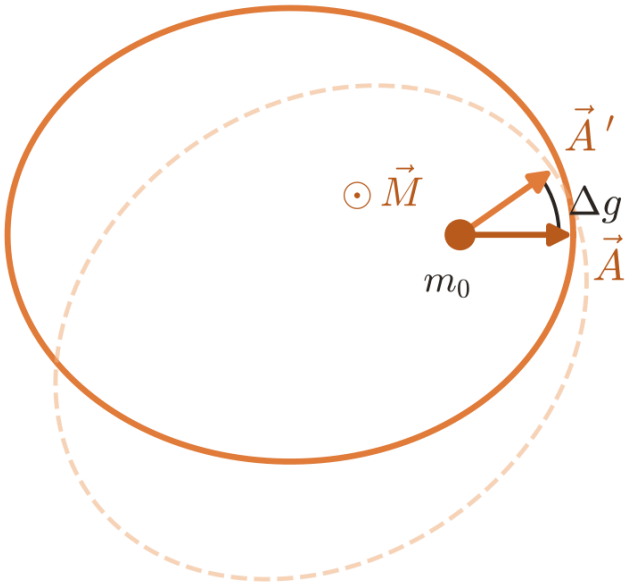
$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_0^T \delta\, U(r)\, dt \qquad (26)$$

Эллипс «бүтін» ретінде айналады; оған бұрыштық жылдамдық Ω (перигелийдің айналу жылдамдығы) тағайындаймыз:

$$\Delta\varphi = \Omega \cdot T \qquad (27)$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial M}\frac{1}{T}\int_0^T \delta\, U\, dt \qquad (28)$$

T периоды тек E интегралына тәуелді, сондықтан $\partial/\,\partial M$ операциясын интеграл алдына шығаруға болады. Демек Ω — ұйытқудың период бойынша **орташа мәнінің** M бойынша туындысы.



Эллипс Ω бұрыштық жылдамдықпен баяу айналады

Бұл — адиабаталық теориядағы $\vec{\Omega} = \partial\overline{H}/\,\partial\vec{M}$ формуласының ньютондық бастауы.

Жаңа қозғалыс интегралы M_0

Кеплер қозғалысында энергия (5)-тен:

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \quad (29)$$

$$a = \frac{M_0^2}{m\alpha} \quad (30)$$

M_0 — «әрекет» өлшемі бар жаңа шама. Сонда:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2M_0^2} \quad (31)$$

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}} \quad (32)$$

Орташа қозғалыс [2]:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{m\alpha^2}{M_0^3} = \frac{\partial E}{\partial M_0} \quad (33)$$

Маңызы

Энергияның сақталуымен түсіндірілетін M_0 интегралы мен M, A интегралдары арасында (32) байланыс бар.

(28), (32) және (33) формулалары ЖСТ механикасында денелер қозғалысының **адиабаталық теориясын** құруда маңызды рөл атқарады [3].

Қорытынды

- Кеплер есебі $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық интегралдары арқылы оңай шешіледі: орбита — конустық қима.
- $E < 0$ кезінде орбита эллипс; a тек энергияға, b энергия мен моментке тәуелді.
- Орталық өрісте траектория тек $U \sim 1/r$ және $U \sim r^2$ үшін тұйық.
- Квази-Кеплер есебінде перигелий $\Omega = \frac{\partial}{\partial M}\overline{\delta U}$ жылдамдықпен айналады.
- M_0 интегралы мен орташа қозғалыс (33) — адиабаталық теорияның іргетасы.

Негізгі формулалар

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial M}\frac{1}{T}\int_0^T \delta U\, dt$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\partial E}{\partial M_0}$$

Келесі дәріс: ЖСТ механикасындағы адиабаталық теория.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Fock V. Zur Schrödingerschen Wellenmechanik // Z. Phys. – 1926. – Bd. 38. – S. 242–250.

2. Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie // Z. Phys. – 1926. – Bd. 37. – S. 895.

3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 448 с.