Сетевое программирование

Лекция 2

Основы теории графов. Узлы и рёбра. Неориентированные и ориентированные графы

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

Цель и план лекции

Цель

Изучение базовых понятий теории графов, различий между неориентированными и ориентированными графами, способов представления графов в памяти компьютера и умение применять эти понятия при описании телекоммуникационных сетей.

1. Введение
2. Неориентированные графы
3. Ориентированные графы
4. Основные элементы структуры графа
5. Специальные классы графов
6. Симметрия связей и её моделирование
7. Способы представления графов
8. Работа с графами в NetworkX

1 Введение

- Чтобы корректно описать сеть средствами программирования, необходимо точно определить объекты модели и их свойства.
- Важнейший вопрос при построении модели состоит в том, является ли связь симметричной.

2 Неориентированные графы

- В неориентированном графе ребро представляет собой неупорядоченную пару вершин: записи (u, v) и (v, u) обозначают одно и то же ребро.

$$\sum deg(v) = 2|E|.$$

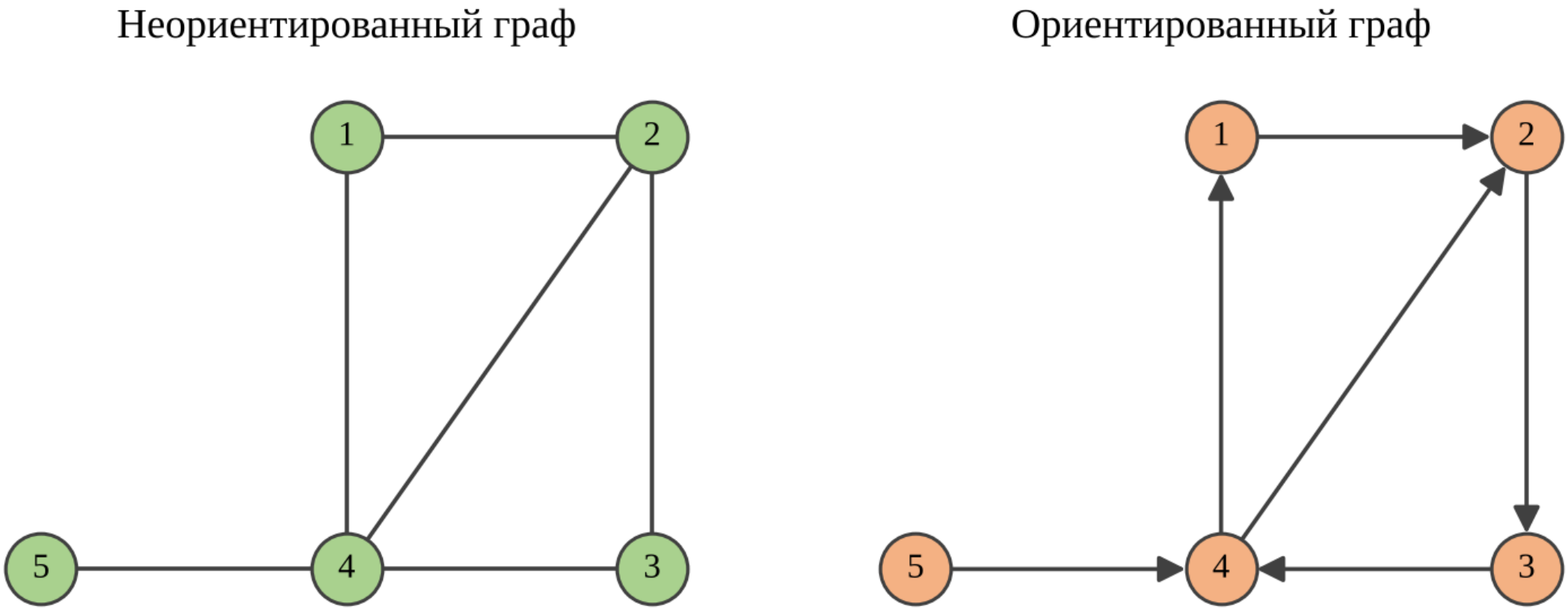
- Из этого соотношения следует, что средняя степень узла равна 2|E|/|V|, а число вершин нечётной степени всегда чётно.
- Полный граф, в котором соединены все пары вершин, содержит |V|(|V|−1)/2 рёбер.

3 Ориентированные графы

- В ориентированном графе (орграфе) связь задаётся упорядоченной парой (u, v), которую называют дугой: данные могут передаваться от u к v, но не обязательно в обратном направлении.

$$\sum deg^{-}(v) = \sum deg^{+}(v) = |E|.$$

3 Ориентированные графы (продолжение)



Неориентированный и ориентированный графы

3 Ориентированные графы (продолжение)

- Понятие связности в орграфе разделяется на два вида. Орграф называется сильно связным, если из любой вершины можно достичь любую другую с учётом направления дуг. Он называется слабо связным, если связным оказывается граф, полученный отбрасыванием направлений.

4 Основные элементы структуры графа

Маршрут, путь и цикл

Маршрут – последовательность смежных вершин. Путь – маршрут без повторяющихся вершин.

Длина пути и расстояние

Длина пути в невзвешенном графе равна числу рёбер, а во взвешенном – сумме их весов.

Петля и кратные рёбра

Петля соединяет вершину с самой собой. Кратные рёбра – это несколько рёбер между одной парой вершин; они описывают параллельные каналы.

Компонента связности

Максимальный связный подграф. В сети компоненты соответствуют сегментам, между которыми нет связи.

Взвешенный граф

Граф, в котором ребру сопоставлено числовое значение: задержка, стоимость или пропускная способность.

Подграф

Граф, образованный частью вершин и рёбер исходного графа, например сегмент сети одного оператора.

5 Специальные классы графов

В теории и на практике часто встречаются графы особой структуры, свойства которых хорошо изучены.

Дерево

Связный граф без циклов. Дерево с n вершинами содержит ровно n−1 ребро.

Регулярный граф

Граф, все вершины которого имеют одинаковую степень. Примером является кольцо, в котором степень каждого узла равна двум.

Двудольный граф

Вершины разделены на два множества так, что каждое ребро соединяет вершины разных множеств.

Определение класса графа помогает упростить решение задачи. Например, в дереве кратчайший путь находится тривиально, а наличие ориентированного цикла в таблицах маршрутизации указывает на возможную маршрутную петлю, в которой пакеты будут передаваться по кругу.

5 Специальные классы графов (продолжение)

Планарный граф

Граф, который можно изобразить на плоскости без пересечения рёбер. Для проектирования печатных плат и наземных линий это свойство имеет прямое значение.

Ориентированный ациклический граф

Орграф без ориентированных циклов. Он используется для описания зависимостей между задачами и процессов передачи, в которых данные не должны возвращаться к источнику.

Определение класса графа помогает упростить решение задачи. Например, в дереве кратчайший путь находится тривиально, а наличие ориентированного цикла в таблицах маршрутизации указывает на возможную маршрутную петлю, в которой пакеты будут передаваться по кругу.

6 Симметрия связей и её моделирование

- Реальный канал не всегда можно уверенно считать симметричным. Два основных случая связаны с асимметрией полосы и асимметрией маршрутов.
- Двунаправленный канал с разными параметрами моделируется двумя дугами с собственными значениями атрибутов.

7 Способы представления графов

Выбор структуры данных определяет расход памяти и скорость операций.

Матрица смежности

Квадратная матрица A размером |V|×|V|, где элемент a_{ij} равен 1, если существует ребро из i в j.

Список смежности

Для каждой вершины хранится перечень её соседей. Память составляет O(|V| + |E|), поэтому такой способ является основным для разреженных сетей.

Список рёбер

Простое перечисление пар вершин. Этот формат удобен для хранения топологии в файле и обмена данными.

8 Работа с графами в NetworkX

- Неориентированный граф создаётся классом `nx.Graph`, а ориентированный — классом `nx.DiGraph`.

8 Неориентированный и ориентированный графы

Листинг 2.1.

```
import networkx as nx

G = nx.Graph([(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 5)])
D = nx.DiGraph([(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (5, 4)])

print("Степени G:", dict(G.degree()))
print("Сумма степеней:", sum(d for _, d in G.degree()),
      "= 2*E:", 2 * G.number_of_edges())
print("Плотность G:", round(nx.density(G), 2))
print("Входящие D:", dict(D.in_degree()))
print("Исходящие D:", dict(D.out_degree()))
print("Сильно связен:", nx.is_strongly_connected(D))
print("Слабо связен:", nx.is_weakly_connected(D))
print(nx.to_numpy_array(G, nodelist=[1, 2, 3, 4, 5], dtype=int))
```

8 Результат: Неориентированный и ориентированный графы

```
Степени G: {1: 2, 2: 3, 3: 2, 4: 4, 5: 1}
Сумма степеней: 12 = 2*E: 12
Плотность G: 0.6
Входящие D: {1: 1, 2: 2, 3: 1, 4: 2, 5: 0}
Исходящие D: {1: 1, 2: 1, 3: 1, 4: 2, 5: 1}
Сильно связен: False
Слабо связен: True
[[0 1 0 1 0]
 [1 0 1 1 0]
 [0 1 0 1 0]
 [1 1 1 0 1]
 [0 0 0 1 0]]
```

Метод `to_undirected()` преобразует орграф в неориентированный граф, а метод `reverse()` изменяет направление всех дуг. Метод `degree()` возвращает пары «узел – степень»; для орграфа дополнительно доступны `in_degree()` и `out_degree()`.

9 Изоморфизм и операции над графами

- Два графа называются изоморфными, если между их вершинами существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность.
- Над графами определены операции, используемые при построении и анализе моделей.

9

Изоморфизм и операции над графами (продолжение)

Объединение

Соединяет множества вершин и рёбер двух графов; применяется при слиянии сетей подразделений.

Удаление вершины или ребра

Соответствует моделированию отказов.

Стягивание ребра

Две смежные вершины заменяются одной. Такая операция используется для укрупнения модели: например, все устройства одного узла связи заменяются одной вершиной.

Подразбиение ребра

В ребро вставляется новая вершина. Так моделируется установка промежуточного усилителя или ретранслятора.

Дополнение

Граф, содержащий именно те рёбра, которых нет в исходном. С его помощью удобно перечислять возможные новые каналы.

Декартово произведение

Из двух путей получают решётку, а из решётки и пути – трёхмерную решётку. Такие топологии типичны для вычислительных кластеров.

10 Спектральное представление

- Кроме матрицы смежности A используют матрицу Лапласа:

$$L = D - A,$$

- где D – диагональная матрица степеней. Собственные значения матрицы L неотрицательны.
- Матрица инцидентности B отражает связь между вершинами и рёбрами. Её строки соответствуют вершинам, столбцы – рёбрам.
- Степени матрицы смежности также имеют важный смысл: элемент $(A^k)_{ij}$ равен числу маршрутов длины k между вершинами i и j.

11 Разбор примера

1. Рассмотрим неориентированный граф, приведённый на рис. 2.1 слева.
2. В нём |V| = 5, |E| = 6.
3. Степени равны: deg(1) = 2, deg(2) = 3, deg(3) = 2, deg(4) = 4, deg(5) = 1.
4. Их сумма равна 12 = 2·6.
5. Вершин нечётной степени две (2 и 5), что соответствует следствию из леммы о рукопожатиях.
6. Плотность равна 2·6/(5·4) = 0,6.
7. Сравним объём памяти.

11 Разбор примера (продолжение)

8 Пусть сеть содержит 10^5 узлов со средней степенью 4.

9 Тогда $|E| = 2 \cdot 10^5$.

10 Матрица смежности содержит 10^{10} элементов: при одном байте на элемент это 10 ГБ. Список смежности содержит $2|E| = 4 \cdot 10^5$ записей о соседях, то есть примерно в 25 тысяч раз меньше элементов.

11 Такой расчёт объясняет, почему для разреженных сетей используются списки смежности.

12 Вопросы для обсуждения на занятии

Выбор типа графа

Какой граф подходит для описания маршрутов BGP между автономными системами и почему?

Укрупнение

Что теряется при стягивании всех устройств узла связи в одну вершину?

Связность

Может ли ориентированная сеть быть связной как неориентированная, но не обеспечивать доставку данных? Приведите пример.

Контрольные вопросы

1. Чем ребро неориентированного графа отличается от дуги ориентированного графа?
2. Сформулируйте лемму о рукопожатиях и приведите следствие из неё.
3. Что такое плотность графа? Почему реальные сети обычно являются разреженными?
4. Что такое полустепени захода и исхода?
5. Чем сильная связность отличается от слабой?
6. В каких случаях телекоммуникационную сеть необходимо моделировать ориентированным графом?
7. Сравните матрицу смежности и список смежности по затратам памяти и скорости операций.
8. Какие методы NetworkX позволяют вычислить степени вершин орграфа?

Список литературы

1. Newman M. Networks. – 2nd ed. – Oxford: Oxford University Press, 2018. – 780 p.
2. Diestel R. Graph Theory. – 5th ed. – Berlin: Springer, 2017.
3. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stein C. Introduction to Algorithms. – 4th ed. – Cambridge, MA: MIT Press, 2022.
4. Sedgewick R., Wayne K. Algorithms. – 4th ed. – Boston: Addison-Wesley, 2011.
5. NetworkX Documentation [Электронный ресурс]. – URL: https://networkx.org/documentation/stable/