Сетевое программирование

Лекция 8

Потоки и пропускная способность в сети. Максимальный поток и минимальный разрез

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

Цель и план лекции

Цель

Изучение модели сетевого потока, теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе, а также получение навыков определения пропускной способности сети и её узких мест средствами NetworkX.

1. Введение
2. Модель сетевого потока
3. Разрезы и основная теорема
4. Алгоритмы поиска максимального потока
5. Расширенные постановки задач
6. Остаточная сеть и работа алгоритма
7. Связанные задачи

1 Введение

- Поиск кратчайшего пути отвечает на вопрос о том, по какому маршруту передавать данные, однако не учитывает, какой объём трафика способна пропустить сеть.
- Модель потока позволяет определить предельную производительность сети между источником и приёмником, выявить каналы, ограничивающие передачу, и обосновать целесообразность их модернизации.

2 Модель сетевого потока

Рассматривается ориентированный граф G = (V, E), в котором каждая дуга (u, v) имеет неотрицательную пропускную способность c(u, v).

Ограничение пропускной способности

Поток по дуге не превышает её пропускной способности: 0 ≤ f(u, v) ≤ c(u, v).

Сохранение потока

Для каждой вершины, кроме s и t, суммарный входящий поток равен суммарному исходящему.

2 Модель сетевого потока (продолжение)

- Величина потока равна суммарному потоку, выходящему из источника. Задача о максимальном потоке состоит в поиске допустимого потока с наибольшей величиной.
- Необходимо отметить, что данная модель является упрощением. Она рассматривает трафик как непрерывную величину, которую можно произвольно разделять между путями, и не учитывает задержки и очереди.

3 Разрезы и основная теорема

- Разрезом (s–t разрезом) называется разбиение множества вершин на два подмножества S и T, такие что s принадлежит S, а t принадлежит T. Пропускная способность разреза равна сумме пропускных способностей дуг, идущих из S в T:

$$c(S, T) = \sum c(u, v), \quad u \in S, v \in T.$$

- Весь поток от s к t должен пересечь любой разрез, поэтому его величина не превышает пропускной способности любого разреза.
- Практический смысл теоремы заключается в том, что минимальный разрез указывает именно те каналы, которые ограничивают производительность.

4 Алгоритмы поиска максимального потока

Метод Форда–Фалкерсона

Пока в остаточной сети существует путь из s в t (увеличивающий путь), по нему пропускается дополнительный поток.

Алгоритм Эдмондса–Карпа

Вариант метода, в котором увеличивающий путь ищется поиском в ширину. Его сложность составляет $O(|V||E|^2)$.

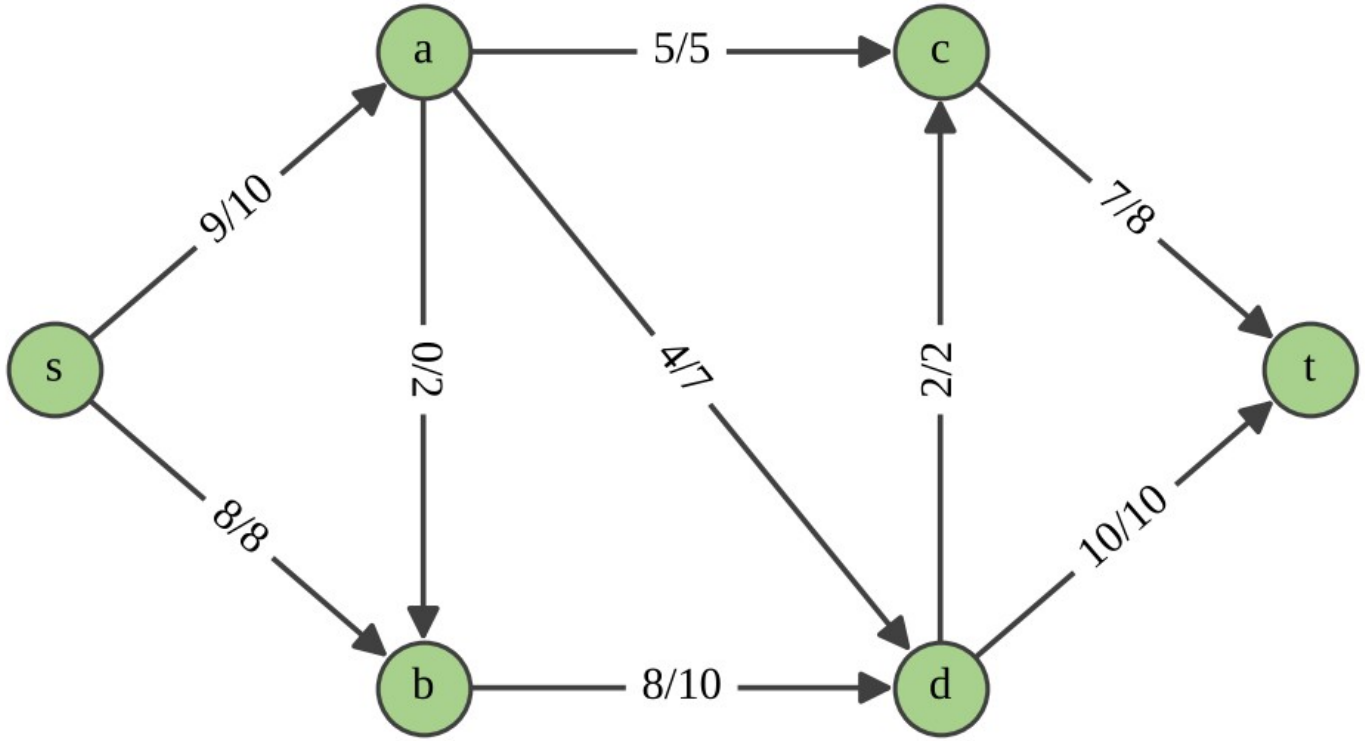
Алгоритм проталкивания предпотока

Работает с локальными операциями проталкивания избыточного потока и подъёма вершин.

Алгоритмы Диница и Бойкова–Колмогорова

Также доступны в модуле `networkx.algorithms.flow`; они могут быть эффективны для некоторых классов графов.

4 Алгоритмы поиска максимального потока (продолжение)



Максимальный поток в сети (поток/пропускная способность)

4 Максимальный поток и минимальный разрез

Листинг 8.1.

```
import networkx as nx

G = nx.DiGraph()
for u, v, c in [("s", "a", 10), ("s", "b", 8), ("a", "b", 2),
                ("a", "c", 5), ("a", "d", 7), ("b", "d", 10),
                ("c", "t", 8), ("d", "c", 2), ("d", "t", 10)]:
    G.add_edge(u, v, capacity=c)

value, flow = nx.maximum_flow(G, "s", "t")
print("Максимальный поток:", value)

cut_value, (S, T) = nx.minimum_cut(G, "s", "t")
cut = [(u, v) for u in S for v in G[u] if v in T]
print("Минимальный разрез:", cut_value)
print("S =", sorted(S), " T =", sorted(T))
print("Каналы разреза:", cut)
```

4 Результат: Максимальный поток и минимальный разрез

```
Максимальный поток: 17
Минимальный разрез: 17
S = ['a', 'b', 'd', 's']  T = ['c', 't']
Каналы разреза: [('d', 'c'), ('d', 't'), ('a', 'c')]
```

Значение минимального разреза совпало с величиной максимального потока, что соответствует теореме.

5 Расширенные постановки задач

Несколько источников и приёмников

Вводится фиктивный суперисточник, соединённый со всеми источниками, и суперсток, с которым соединены все приёмники.

Ограничение пропускной способности узла

Узел разделяется на входную и выходную части, соединённые дугой с пропускной способностью, равной производительности узла.

Неориентированные каналы

Двунаправленный канал заменяется двумя противоположными дугами. В NetworkX это необходимо учитывать, поскольку отсутствующий у дуги атрибут `capacity` трактуется как бесконечная пропускная способность, а это скрывает ошибки ввода.

Поток минимальной стоимости

Каждой дуге дополнительно назначается стоимость передачи единицы потока, что рассматривается в лекции об оптимизации.

5 Суперисточник и анализ модернизации

Листинг 8.2.

```
H = nx.DiGraph()
for u, v, c in [("DC1", "X", 40), ("DC2", "X", 30), ("X", "Y", 50),
                ("Y", "Район1", 35), ("Y", "Район2", 35)]:
    H.add_edge(u, v, capacity=c)

for s in ("DC1", "DC2"):
    H.add_edge("SRC", s)            # бесконечная ёмкость
for t in ("Район1", "Район2"):
    H.add_edge(t, "SNK")

print("До модернизации:", nx.maximum_flow_value(H, "SRC", "SNK"))
_, (S, T) = nx.minimum_cut(H, "SRC", "SNK")
print("Узкое место:", [(u, v) for u in S for v in H[u] if v in T])

H["X"]["Y"]["capacity"] = 100
print("После модернизации:", nx.maximum_flow_value(H, "SRC", "SNK"))
```

5 Результат: Суперисточник и анализ модернизации

```
До модернизации: 50
Узкое место: [('X', 'Y')]
После модернизации: 70
```

Важно обратить внимание, что расширение канала X–Y увеличивает суммарный поток лишь до значения, которое определяется уже следующим минимальным разрезом.

6 Остаточная сеть и работа алгоритма

- Остаточная сеть G_f содержит для каждой дуги (u, v) с потоком f её остаточную пропускную способность c(u, v) − f(u, v).
- Если пропускные способности являются целыми числами, метод Форда–Фалкерсона увеличивает поток не менее чем на единицу за итерацию.
- Сам минимальный разрез находится просто: после завершения работы множество S составляют вершины, достижимые из источника в остаточной сети.

7 Связанные задачи

Многопродуктовый поток

Несколько пар источник–приёмник передают различные данные, совместно используя каналы.

Рёберно-непересекающиеся пути

Если все пропускные способности равны единице, максимальный поток равен наибольшему количеству путей без общих дуг. Эта связь с теоремой Менгера будет рассмотрена в лекции 9.

Паросочетание

Задача о назначении заявок на ресурсы в двудольном графе сводится к максимальному потоку с единичными пропускными способностями.

Минимальный разрез без выделенных вершин

Алгоритм Штор–Вагнера находит глобально минимальный разрез. Его результат указывает наиболее слабое сечение сети в целом.

7 Связанные задачи (продолжение)

- В задаче планирования сети важно, что величина максимального потока показывает предельную производительность при оптимальном распределении трафика.
- Для линейной постановки задачу о максимальном потоке можно записать как задачу линейного программирования.

8 Разбор примера

1. Рассмотрим сеть из дуг s → a (3), s → b (2), a → b (1), a → t (2), b → t (3).
2. Шаг 1: путь s–a–t с остаточной ёмкостью min(3, 2) = 2.
3. Поток равен 2, дуга a → t насыщена, s → a имеет остаток 1.
4. Шаг 2: путь s–b–t даёт min(2, 3) = 2.
5. Поток равен 4, дуга s → b насыщена, b → t имеет остаток 1.
6. Шаг 3: путь s–a–b–t даёт min(1, 1, 1) = 1.
7. Поток равен 5.

8 Разбор примера (продолжение)

8 Других увеличивающих путей нет.

9 Разрез S = {s}, T = {a, b, t} имеет пропускную способность 3 + 2 = 5, что совпадает с полученным потоком.

10 Значит, поток является максимальным.

9 Вопросы для обсуждения на занятии

Узкое место

Почему модернизация канала вне минимального разреза не увеличивает поток?

Модель

Какие свойства IP-трафика нельзя учесть в задаче о максимальном потоке?

Резерв

Как определить запас пропускной способности с учётом отказа любого одного канала?

Контрольные вопросы

1. Какими условиями определяется допустимый поток в сети?
2. Что называется разрезом и как вычисляется его пропускная способность?
3. Сформулируйте теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе.
4. Какую роль в методе Форда–Фалкерсона играет остаточная сеть?
5. В чём различие между алгоритмами Форда–Фалкерсона и Эдмондса–Карпа?
6. Как решается задача с несколькими источниками и приёмниками?
7. Как учесть ограничение производительности узла?
8. Почему максимальный поток является верхней оценкой пропускной способности реальной сети?

Список литературы

1. Ford L.R., Fulkerson D.R. Maximal flow through a network // Canadian Journal of Mathematics. – 1956. – Vol. 8. – P. 399–404.

2. Edmonds J., Karp R.M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems // Journal of the ACM. – 1972. – Vol. 19, No. 2. – P. 248–264.

3. Goldberg A.V., Tarjan R.E. A new approach to the maximum-flow problem // Journal of the ACM. – 1988. – Vol. 35, No. 4. – P. 921–940.

4. Dinic E.A. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation // Soviet Mathematics Doklady. – 1970. – Vol. 11. – P. 1277–1280.

5. Boykov Y., Kolmogorov V. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2004. – Vol. 26, No. 9. – P. 1124–1137.

6. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.

7. NetworkX Documentation [Электронный ресурс]. – URL: https://networkx.org/documentation/stable/