Техника исследования гравитационных волн

Лекция 3

Гравитационные волны от двойных компактных объектов

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

Цель и план лекции

Цель

Изучение эволюции двойных компактных систем на стадиях сближения, слияния и затухания, а также связи параметров источника с формой гравитационно-волнового сигнала для систем BBH, BNS и NSBH.

1. Введение
2. Стадия сближения
3. Слияние и затухание
4. Типы двойных систем
5. Время жизни двойной системы
6. Постньютоновское разложение и модели формы сигнала
7. Приливные эффекты и спины
8. Подходы к моделированию слияния

1 Введение

- Двойные компактные объекты являются основным источником наблюдаемых гравитационных волн.
- Анализ включает три стадии: сближение по спирали (inspiral), слияние (merger) и затухание (ringdown).

2 Стадия сближения

- На стадии сближения орбитальная скорость относительно мала, и применимо постньютоновское разложение.

$$M_c = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}.$$

- Эволюция частоты описывается соотношением:

$$\dot{f} = (96/5)\, \pi^{8/3} (G M_c / c^3)^{5/3} f^{11/3}.$$

- Интегрирование даёт зависимость частоты от времени τ, оставшегося до слияния:

$$f(\tau) = (1/\pi) (5 / 256\tau)^{3/8} (G M_c / c^3)^{-5/8}.$$

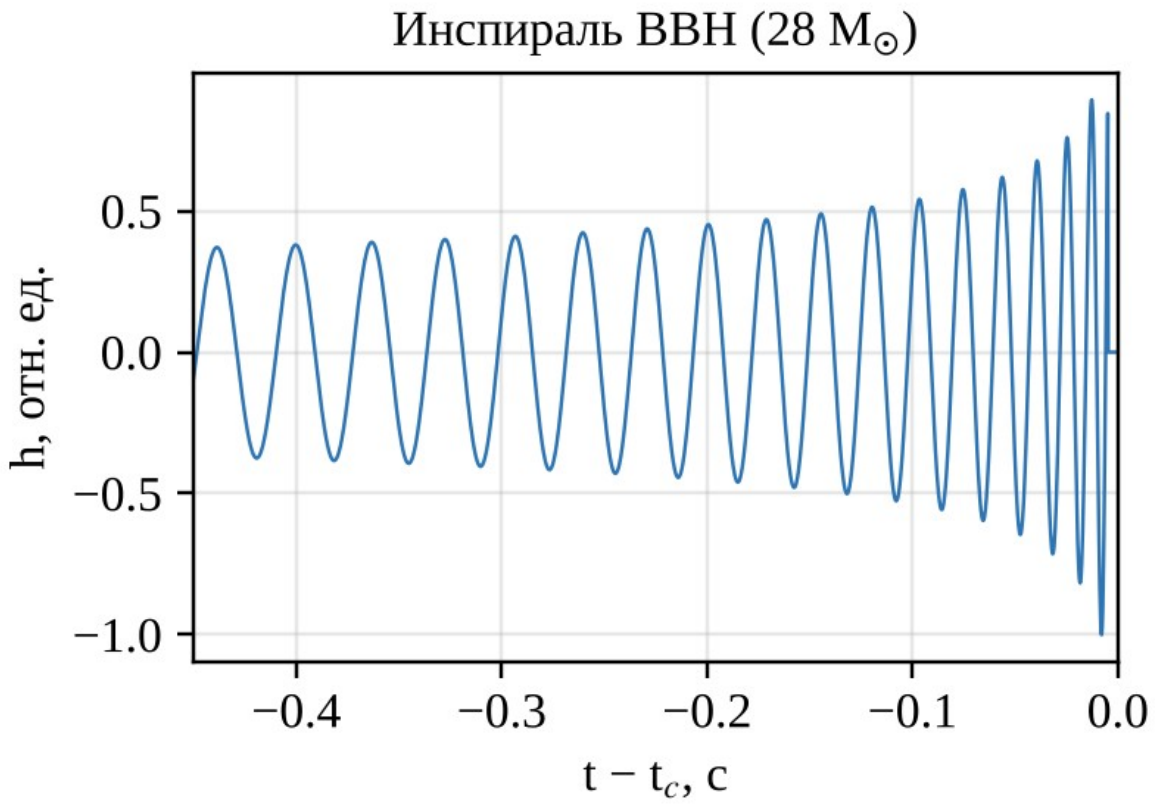
2 Стадия сближения (продолжение)

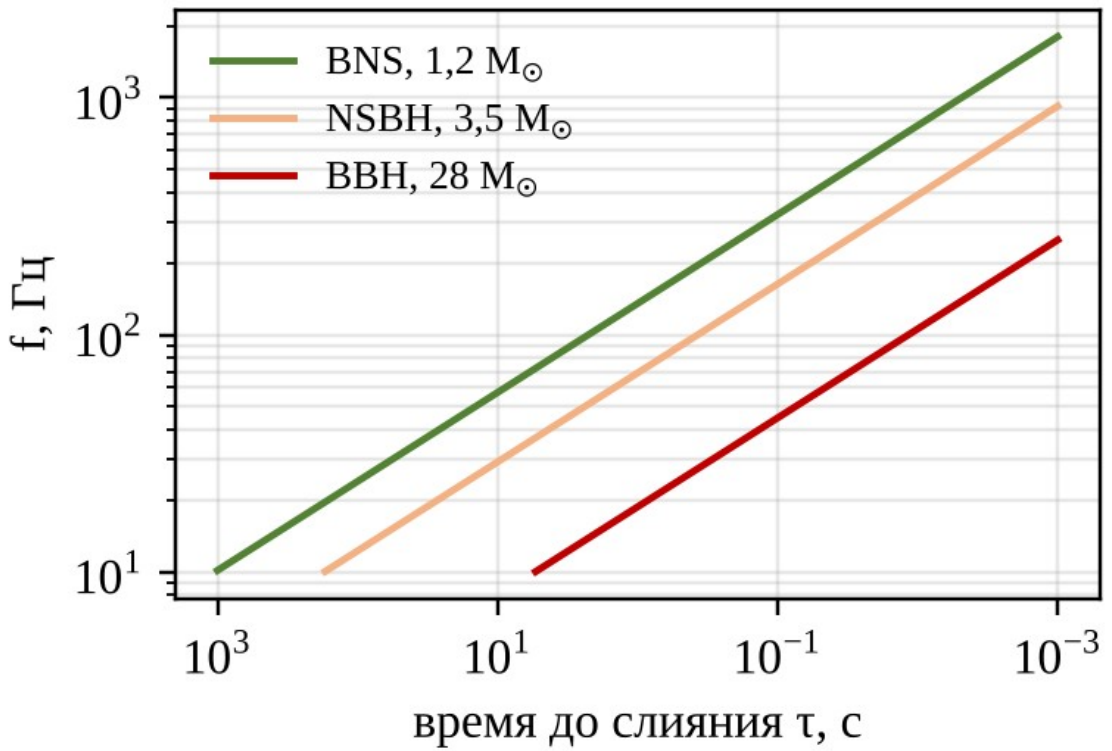
- Амплитуда для источника, расположенного на расстоянии r и обращённого к наблюдателю плоскостью орбиты, равна:

$$h(\tau) = (4/r)\,(G\,M_c / c^2)^{5/3}\,(\pi f / c)^{2/3}.$$

- Амплитуда возрастает вместе с частотой.

2 Стадия сближения (продолжение)





Форма инспирального сигнала и зависимость частоты от времени до слияния

2 Стадия сближения (продолжение)

- Чем меньше чирп-масса, тем дольше система находится в полосе детектора. Из-за этого лёгкие системы BNS наблюдаются десятки секунд, а тяжёлые BBH – доли секунды.
- Постньютоновская теория также учитывает спины компонентов. Основной комбинацией, которая определяется из сигнала наиболее точно, является эффективный спин χ_{eff}.

3 Слияние и затухание

- Сближение заканчивается вблизи внутренней устойчивой круговой орбиты (ISCO), частота гравитационной волны для которой равна:

$$f_{ISCO} = c^3 / (6^{3/2}\,\pi\, G\, M) \approx 4{,}4\ кГц \cdot (M_\odot / M).$$

- Стадия слияния сильно нелинейна. Её описывают численным решением уравнений Эйнштейна.
- Образовавшаяся чёрная дыра излучает затухающие колебания – квазинормальные моды.

$$h(t) \propto exp(-\pi f t / Q)\, cos(2\pi f t + \varphi).$$

3 Слияние и затухание (продолжение)

- Таким образом, наблюдение стадии затухания позволяет проверить теорию Керра.

4 Типы двойных систем

Двойные чёрные дыры (BBH)

Наиболее часто регистрируемый тип, большая амплитуда, короткий сигнал. Событие GW190521 с конечной массой порядка 140 солнечных масс является примером образования чёрной дыры промежуточной массы.

Двойные нейтронные звёзды (BNS)

Длинные сигналы, в которых на поздней стадии сказываются приливные деформации, описываемые параметром Λ.

Смешанные системы (NSBH)

Системы, состоящие из нейтронной звезды и чёрной дыры, например GW200105 и GW200115.

Измеряемые массы зависят от красного смещения: в данных наблюдаются величины $M(1+z)$, поэтому для определения массы источника необходимо дополнительно знать его расстояние.

4 Длительность сигнала и характерные частоты

Листинг 3.1.

```
import numpy as np

Ts = 4.925e-6                  # GM_sun/c^3, c

def chirp_mass(m1, m2):
    return (m1 * m2)**0.6 / (m1 + m2)**0.2

def duration(Mc, fl=20.0):
    return 5 / 256 * (Mc * Ts)**(-5 / 3) * (np.pi * fl)**(-8 / 3)

def f_isco(M):
    return 1 / (6**1.5 * np.pi * M * Ts)

print("Система   m1    m2    Mc   tau(20Гц),с  fISCO,Гц")
for name, m1, m2 in [("BNS", 1.4, 1.4), ("NSBH", 10, 1.4),
                     ("BBH", 36, 29)]:
    Mc = chirp_mass(m1, m2)
    print(f"{name:7} {m1:5} {m2:5} {Mc:5.1f} "
          f"{duration(Mc):10.2f} {f_isco(m1 + m2):9.0f}")
```

4 Длительность сигнала и характерные частоты (продолжение)

Листинг 3.1.

```
# Основная мода затухания остатка (подгонка Берти и др.)
M, a = 62.0, 0.67
f = (1.5251 - 1.1568 * (1 - a)**0.1292) / (2 * np.pi * M * Ts)
Q = 0.7 + 1.4187 * (1 - a)**(-0.4990)
print(f"Остаток M={M}, a={a}: f = {f:.0f} Гц, Q = {Q:.1f}")
```

4 Результат: Длительность сигнала и характерные частоты

```
Система   m1    m2    Mc   tau(20Гц),c  fISCO,Гц
BNS       1.4   1.4   1.2     157.90      1571
NSBH       10   1.4   3.0      35.30       386
BBH        36    29  28.1       0.85        68
Остаток M=62.0, a=0.67: f = 272 Гц, Q = 3.2
```

Расчёт демонстрирует огромное различие в длительности сигналов. Следует помнить, что формула главного порядка служит оценкой, а для измерения параметров необходимо использовать полные модели формы сигнала.

5 Время жизни двойной системы

- Орбита сближается под действием потери энергии. Для круговой орбиты с начальным расстоянием a формула Петерса даёт время до слияния:

$$T = (5/256)\, c^5\, a^4 \,/\, (\, G^3\, m_1\, m_2\, (m_1 + m_2)\,).$$

- Зависимость от a очень сильная, поэтому даже двукратное уменьшение расстояния сокращает время жизни в 16 раз.

5 Время слияния двойной системы по формуле Петерса

Листинг 3.2.

```
Rs, Myr = 6.96e8, 3.156e13     # радиус Солнца, м; миллион лет, с
c = 2.998e8

def t_merge(m1, m2, a):
    return 5 / 256 * (a / c)**4 / (Ts**3 * m1 * m2 * (m1 + m2))

print("a, R_sun   BNS, млн лет   BBH (30+30), млн лет")
for a in (1, 5, 20):
    print(f"{a:7} {t_merge(1.4, 1.4, a * Rs) / Myr:14.2f}"
          f" {t_merge(30, 30, a * Rs) / Myr:16.4f}")
```

```
a, R_sun   BNS, млн лет   BBH (30+30), млн лет
      1          27.42          0.0028
      5       17137.63          1.7417
     20     4387232.64        445.8728
```

6 Постньютоновское разложение и модели формы сигнала

- Постньютоновская теория является разложением по малому параметру v/c. Порядок записи nPN соответствует поправке порядка $(v/c)^{2n}$.

$$\Psi(f) = 2\pi f\, t_c - \varphi_c - \pi/4 + (3/128)\,(\pi G\, M_c f/c^3)^{-5/3}\,[\,1 + \Sigma_k\, a_k\, v^k\,].$$

- Поправки к фазе зависят от отношения масс и спинов. Вклад первого порядка зависит от симметричного отношения масс $\eta = m_1 m_2/(m_1+m_2)^2$, а поправка 1,5PN содержит спин-орбитальный вклад.
- Для моделирования всех трёх стадий служат несколько семейств сигналов:

6 Постньютоновское разложение и модели формы сигнала (продолжение)

SEOBNR

Используют эффективную одночастичную теорию, в которой двойная система заменяется движением одного тела во внешней метрике, а свободные параметры калибруются по численным данным.

IMRPhenom

Феноменологические аналитические выражения для частотной области, быстрые в вычислении.

NRSur

Суррогатные модели, непосредственно интерполирующие результаты численной относительности.

В частности, при подготовке анализа используют набор данных проекта SXS. Выбор модели может влиять на оценки параметров, поэтому результаты сравнивают для разных моделей.

7 Приливные эффекты и спины

- Приливная деформируемость характеризуется безразмерным параметром Λ, определяющим реакцию вещества на приливное поле.

$$\tilde{\Lambda} = (16/13)\,[\,(m_1+12m_2)\,m_1^4\,\Lambda_1 + (m_2+12m_1)\,m_2^4\,\Lambda_2\,]\,/\,(m_1+m_2)^5.$$

- Поправка к фазе проявляется лишь на высоких частотах, в 5PN-порядке по постньютоновской классификации, но содержит большой коэффициент.
- Эффективный спин определяется выражением:

$$\chi_{\mathrm{eff}} = (m_1\chi_{1z} + m_2\chi_{2z})\,/\,(m_1+m_2).$$

7 Приливные эффекты и спины (продолжение)

- Он сохраняется с высокой точностью на стадии сближения и служит показателем механизма образования: для эволюции изолированной пары ожидается преимущественно положительное значение, а для динамического образования – значения, симметричные относительно нуля.

8 Подходы к моделированию слияния

- Стадия слияния требует численного решения уравнений Эйнштейна. Прорыв был достигнут в 2005 году, когда Ф. Преториус, а также исследовательские группы, работающие с формализмом BSSN и методом движущихся проколов, выполнили устойчивый расчёт орбит и слияния двух чёрных дыр.
- На стадии затухания основными являются квазинормальные моды. Спектроскопия чёрных дыр заключается в измерении нескольких мод и проверке их соответствия единым значениям массы и спина.

9 Разбор примера

1. Проверим закон масштабирования длительности сигнала.

2. Поскольку $\tau \propto M_c^{-5/3}$, отношение длительностей BNS ($M_c = 1{,}22$) и BBH ($M_c = 28{,}1$) равно $(28{,}1/1{,}22)^{5/3} = 23{,}03^{5/3} \approx 186$.

3. Если сигнал BNS от 20 Гц длится приблизительно 158 с, то для BBH получается $158/186 \approx 0{,}85$ с, что совпадает с результатом листинга 3.1.

4. Частота ISCO для $M = 65\ M_\odot$ равна примерно $4400/65 \approx 68$ Гц, тогда как сигнал GW150914 содержал заметную мощность вплоть до 150–250 Гц, поскольку стадии слияния и затухания лежат выше значения ISCO.

10 Вопросы для обсуждения на занятии

Модели

В каких случаях важно сравнивать результаты нескольких моделей сигнала?

Астрофизика

Как эффективный спин позволяет судить о способе образования системы?

Точность

Почему массы компонентов определяются менее точно, чем чирп-масса?

Контрольные вопросы

1. Какие стадии включает эволюция двойной компактной системы?
2. Что такое чирп-масса и почему она определяется наиболее точно?
3. Запишите зависимость частоты сигнала от времени на стадии сближения.
4. Как определяется частота ISCO и как она зависит от массы?
5. Какую информацию содержит стадия затухания сигнала?
6. Чем различаются сигналы BBH, BNS и NSBH?
7. Как приливные эффекты в системах BNS связаны с уравнением состояния вещества?
8. Как красное смещение влияет на измеряемые массы компонентов?

Список литературы

1. Maggiore M. Gravitational Waves. Volume 2: Astrophysics and Cosmology. – Oxford: Oxford University Press, 2018.
2. Peters P.C. Gravitational radiation and the motion of two point masses // Physical Review. – 1964. – Vol. 136. – P. B1224–B1232.
3. Blanchet L. Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries // Living Reviews in Relativity. – 2014. – Vol. 17. – Art. 2.
4. Buonanno A., Damour T. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics // Physical Review D. – 1999. – Vol. 59. – Art. 084006.
5. Berti E., Cardoso V., Will C.M. On gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA // Physical Review D. – 2006. – Vol. 73. – Art. 064030.
6. Abbott B.P., et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger // Physical Review Letters. – 2016. – Vol. 116. – Art. 061102.
7. Abbott B.P., et al. GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral // Physical Review Letters. – 2017. – Vol. 119. – Art. 161101.
8. Abbott R., et al. GW190521: A binary black hole merger with a total mass of 150 M⊙ // Physical Review Letters. – 2020. – Vol. 125. – Art. 101102.
9. Abbott R., et al. Observation of gravitational waves from two neutron star–black hole coalescences // The Astrophysical Journal Letters. – 2021. – Vol. 915. – Art. L5.