# Техника исследования гравитационных волн

*Лекция 5*

# Характеристики и параметры гравитационно-волновых сигналов

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

# Цель и план лекции

## Цель

Изучение основных характеристик гравитационно-волнового сигнала – амплитуды, частоты, фазы и чирп-массы, понятия отношения сигнал/шум и принципов определения параметров источника.

1. Введение
2. Амплитуда, частота и фаза
3. Параметры источника
4. Отношение сигнал/шум
5. Байесовская оценка параметров
6. Усреднённая дальность
7. Определение параметров по данным
8. Отношение сигнал/шум сети и статистическая значимость

# 1 Введение

- Зарегистрированный гравитационно-волновой сигнал описывается функцией времени h(t), однако наибольший интерес представляют физические параметры системы, которые определяют его форму.

# 2 Амплитуда, частота и фаза

## Амплитуда h

Безразмерная величина, характеризующая относительную деформацию. Амплитуда уменьшается пропорционально расстоянию до источника, поэтому она используется для определения светимостного расстояния.

## Частота f(t)

Мгновенная частота сигнала. На стадии сближения она монотонно растёт, и скорость её изменения определяется чирп-массой.

## Фаза φ(t)

Накопленная фаза содержит наиболее точную информацию о системе. При сближении сигнал совершает большое количество циклов в полосе детектора, поэтому даже малые отклонения параметров приводят к заметному расхождению фаз.

## Чирп-масса

Определяется по частоте и её производной:

$$M_c = (c^3/G)\,[\,(5/96)\,\pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f}\,]^{3/5}.$$

# 2 Амплитуда, частота и фаза (продолжение)

### Характерная деформация

Для сравнения сигнала с шумом используют величину $h_c(f) = 2f|\tilde{h}(f)|$, где $\tilde{h}(f)$ – преобразование Фурье сигнала.

$$|\tilde{h}(f)| = (5/24)^{1/2}\,\pi^{-2/3}\,(c/r)\,(G\,M_c/c^3)^{5/6}\,f^{-7/6}.$$

# 3 Параметры источника

- Система из двух чёрных дыр в общем случае описывается 15 параметрами:

- собственными параметрами (8): две массы и два вектора спинов;
- внешними параметрами (7): расстояние, две координаты на небе, наклон орбиты, угол поляризации, время и фаза слияния.
- Параметры взаимосвязаны. Сильной является связь расстояния и наклона орбиты: и то, и другое влияет на амплитуду.

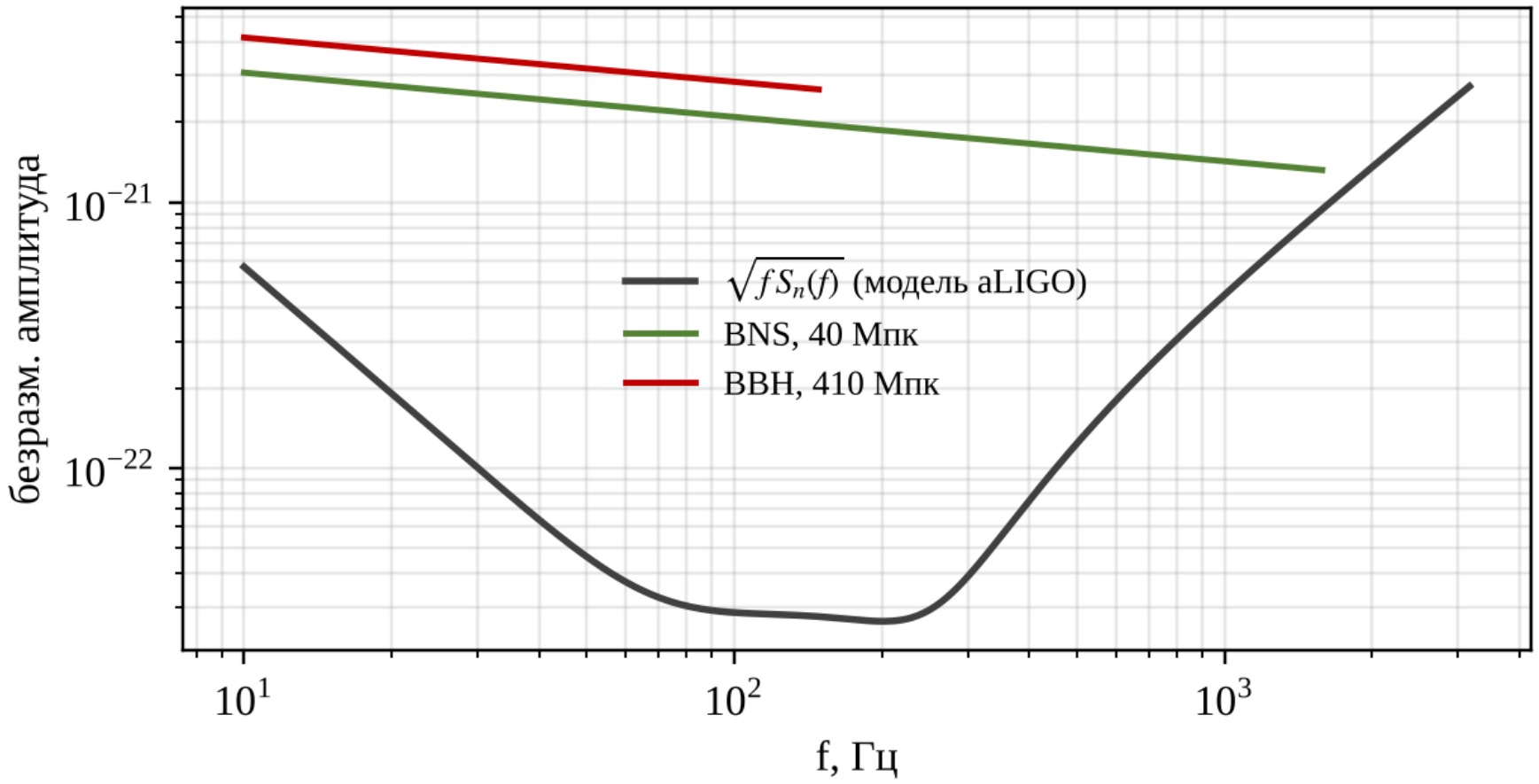
# 4 Отношение сигнал/шум

- Шум детектора характеризуется односторонней спектральной плотностью мощности $S_n(f)$.

$$\rho^2 = 4 \int |\tilde{h}(f)|^2 / S_n(f)\, df.$$

- Смысл выражения заключается в том, что частоты с малым шумом вносят наибольший вклад.
- Отношение кривых определяет вклад в отношение сигнал/шум на данной частоте.

# 4 Отношение сигнал/шум (продолжение)




*Характерная деформация источников и уровень шума (инспиральное приближение)*

# 4 Отношение сигнал/шум (продолжение)

- Для расчёта шума использована аналитическая аппроксимация чувствительности Advanced LIGO:

$$S_n(x) = 10^{-49}\,[\,x^{-4{,}14} - 5x^{-2} + 111\,(1 - x^2 + x^4/2)\,/\,(1 + x^2/2)\,],\quad x = f\,/\,215\ \text{Гц}.$$

# 4 Чирп-масса, отношение сигнал/шум и дальность

Листинг 5.1.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import trapezoid

Ts, c, Mpc = 4.925e-6, 2.998e8, 3.086e22

def Mc_from(f, fdot):
    return (5 / 96 * np.pi**(-8 / 3) * f**(-11 / 3) * fdot)**0.6 / Ts

Mc = 30.0
f = 100.0
fdot = 96 / 5 * np.pi**(8 / 3) * (Mc * Ts)**(5 / 3) * f**(11 / 3)
print(f"f'={fdot:.0f} Гц/с -> Mc = {Mc_from(f, fdot):.1f} M_sun")

def Sn(f):
    x = f / 215.0
    return 1e-49 * (x**-4.14 - 5 * x**-2
                    + 111 * (1 - x**2 + x**4 / 2) / (1 + x**2 / 2))
```

# 4 Чирп-масса, отношение сигнал/шум и дальность (продолжение)

Листинг 5.1.

```
def rho(Mc, r_Mpc, fmax):
    f = np.geomspace(10, fmax, 20000)
    h = (5 / 24)**0.5 * np.pi**(-2 / 3) * c / (r_Mpc * Mpc)
    h *= (Mc * Ts)**(5 / 6) * f**(-7 / 6)
    return np.sqrt(4 * trapezoid(h**2 / Sn(f), f))

M = 2.8
Mc = 1.19
fi = 1 / (6**1.5 * np.pi * M * Ts)
r8 = rho(Mc, 1.0, fi) / 8
print(f"BNS: f_ISCO = {fi:.0f} Гц, rho(40 Мпк) = {rho(Mc, 40, fi):.0f}")
print(f"Дальность при rho=8 (оптим. ориентация): {r8:.0f} Мпк")
print(f"Минимум ASD: {np.sqrt(Sn(np.arange(50., 500.))).min():.1e}")
```

# 4 Результат: Чирп-масса, отношение сигнал/шум и дальность

```
f'=3616 Гц/с -> Mc = 30.0 M_sun
BNS: f_ISCO = 1571 Гц, rho(40 Мпк) = 98
Дальность при rho=8 (оптим. ориентация): 488 Мпк
Минимум ASD: 1.8e-24
```

Рассчитанные значения являются верхней оценкой, так как относятся к проектной чувствительности и оптимальной ориентации источника.

# 5 Байесовская оценка параметров

- Для параметров θ источника и данных d применяется теорема Байеса:

$$p(\theta \mid d) \propto L(d \mid \theta)\, \pi(\theta),$$

- где π(θ) – априорное распределение, а для стационарного гауссова шума функция правдоподобия имеет вид:

$$\ln L(d \mid \theta) = -\tfrac{1}{2}\, (\, d - h(\theta) \mid d - h(\theta)\,) + const.$$

- Апостериорное распределение строят методами стохастической выборки: вложенной выборки (nested sampling) и методов Монте-Карло по схеме цепей Маркова.
- Априорная оценка точности выполняется с помощью информационной матрицы Фишера:

# 5 Байесовская оценка параметров (продолжение)

$$\Gamma_{ij} = (\, \partial h/\partial\theta_i \,|\, \partial h/\partial\theta_j \,), \quad \Sigma \approx \Gamma^{-1}.$$

- Отсюда следует, что погрешность параметров убывает обратно пропорционально значению ρ.

# 6 Усреднённая дальность

- Рассчитанная ранее дальность относится к оптимально ориентированному источнику, расположенному над детектором.

$$\Theta^2 = F_+^2\,((1+\cos^2\iota)/2)^2 + F_\times^2\cos^2\iota.$$

- Для равномерно распределённых источников эффективный объём определяется средним значением $\Theta^3$.

# 6 Усреднение по направлениям и ориентациям

Листинг 5.2.

```
rng = np.random.default_rng(1)
n = 2_000_000
c_th, c_i = rng.uniform(-1, 1, (2, n))
ph, ps = rng.uniform(0, 2 * np.pi, (2, n))
Fp = (0.5 * (1 + c_th**2) * np.cos(2 * ph) * np.cos(2 * ps)
      - c_th * np.sin(2 * ph) * np.sin(2 * ps))
Fc = (0.5 * (1 + c_th**2) * np.cos(2 * ph) * np.sin(2 * ps)
      + c_th * np.sin(2 * ph) * np.cos(2 * ps))
Th = np.sqrt(Fp**2 * ((1 + c_i**2) / 2)**2 + Fc**2 * c_i**2)
print(f"Коэффициент дальности: {1 / np.mean(Th**3)**(1 / 3):.2f}")
```

```
Коэффициент дальности: 2.26
```

# 7 Определение параметров по данным

- Наблюдаемую амплитуду сигнала нельзя рассматривать отдельно от положения и ориентации источника: она зависит от комбинации $F_+$, $F_\times$, наклона орбиты и расстояния.

$$D_{eff} = D / \sqrt{( F_+^2 ((1 + \cos^2\iota)/2)^2 + F_\times^2 \cos^2\iota )}.$$

- Сигнал с данным $D_{eff}$ создаёт в детекторе такую же амплитуду, как оптимально ориентированный источник на расстоянии $D_{eff}$.
- Погрешность оценки времени слияния связана с полосой сигнала. В приближении матрицы Фишера:

$$\sigma_t \approx 1 / (2\pi \rho \sigma_f),$$

# 7 Определение параметров по данным (продолжение)

- где $\sigma_f$ – эффективная ширина частотного спектра сигнала. При $\rho = 10$ и $\sigma_f = 100$ Гц погрешность составляет примерно 0,16 мс.

# 8 Отношение сигнал/шум сети и статистическая значимость

- Для независимых детекторов сетевое отношение сигнал/шум определяется суммой квадратов:

$$\rho_{net}^{2} = \Sigma_i \rho_i^2.$$

- При этом требуется, чтобы сигнал присутствовал в данных всех детекторов согласованно.
- В условиях гауссова шума квадрат модуля выхода согласованного фильтра для шаблона подчиняется распределению хи-квадрат.

# 9 Практическая последовательность извлечения параметров

- На практике применяются следующие этапы. Сначала формируется приближённая оценка параметров, полученная поисковым конвейером.
- Калибровочные погрешности включаются в анализ как дополнительные параметры.
- Применение нескольких моделей сигнала позволяет сравнить их с помощью байесовского фактора.

# 10 Разбор примера

1. В листинге 5.1 вычислено $\rho \approx 98$ для BNS на расстоянии 40 Мпк.

2. Поскольку $\rho \propto 1/D$, на расстоянии 160 Мпк значение уменьшится в 4 раза и составит около 24,5.

3. Рассмотрим сеть из двух детекторов со значениями $\rho_1 = 13$ и $\rho_2 = 11$.

4. Сетевое значение равно $\sqrt{(169 + 121)} = \sqrt{290} \approx 17{,}0$.

5. Таким образом, добавление второго детектора заметно увеличивает общий показатель.

6. Для чирп-массы 30 $M_\odot$ при f = 100 Гц скорость изменения частоты составляет около 3600 Гц/с, что совпадает с расчётом в листинге.

# 11 Вопросы для обсуждения на занятии

### Вырождение

Как разрешить неопределённость между расстоянием и наклоном?

### Значимость

Почему одного значения ρ недостаточно для утверждения об открытии сигнала?

### Априорные данные

Какие априорные предположения наиболее сильно влияют на результат при небольшом ρ?

# Контрольные вопросы

1. Какие физические характеристики определяют гравитационно-волновой сигнал?
2. Как определить чирп-массу по частоте и её производной?
3. Почему фаза сигнала содержит наиболее точную информацию об источнике?
4. Перечислите собственные и внешние параметры двойной системы.
5. Как определяется отношение сигнал/шум? Запишите формулу.
6. Какова роль спектральной плотности шума в определении ρ?
7. Почему результат анализа представляется в виде апостериорного распределения?
8. Что такое дальность обнаружения и от чего она зависит?

# Список литературы


1. Maggiore M. Gravitational Waves. Volume 1: Theory and Experiments. – Oxford: Oxford University Press, 2008.
2. Maggiore M. Gravitational Waves. Volume 2: Astrophysics and Cosmology. – Oxford: Oxford University Press, 2018.
3. Cutler C., Flanagan É.E. Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform? // Physical Review D. – 1994. – Vol. 49. – P. 2658–2697.
4. Finn L.S., Chernoff D.F. Observing binary inspiral in gravitational radiation: One interferometer // Physical Review D. – 1993. – Vol. 47. – P. 2198–2219.
5. Veitch J., et al. Parameter estimation for compact binaries with ground-based gravitational-wave observations using the LALInference software library // Physical Review D. – 2015. – Vol. 91. – Art. 042003.
6. Ashton G., et al. BILBY: A user-friendly Bayesian inference library for gravitational-wave astronomy // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2019. – Vol. 241. – Art. 27.
7. Ajith P. Addressing the spin question in gravitational-wave searches: Waveform templates for inspiralling compact binaries with nonprecessing spins // Physical Review D. – 2011. – Vol. 84. – Art. 084037.
8. Abbott B.P., et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger // Physical Review Letters. – 2016. – Vol. 116. – Art. 061102.
9. Abbott B.P., et al. GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral // Physical Review Letters. – 2017. – Vol. 119. – Art. 161101.