Техника исследования гравитационных волн

Лекция 12

Вариационные и адаптивные методы декомпозиции сигналов

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

Цель и план лекции

Цель

Изучение методов адаптивного разложения сигналов – эмпирической модовой декомпозиции и вариационной модовой декомпозиции, их алгоритмов, особенностей и применения при анализе гравитационно-волновых сигналов в сочетании с энтропийным отбором компонент.

1. Введение
2. Эмпирическая модовая декомпозиция
3. Вариационная модовая декомпозиция
4. Сравнение EMD и VMD
5. Отбор мод по энтропийным критериям
6. Мгновенная частота и спектральный анализ Гильберта
7. Настройка и варианты VMD
8. Применение к гравитационно-волновым данным

1 Введение

- Преобразования Фурье и вейвлет-преобразование используют заранее выбранный базис.

2 Эмпирическая модовая декомпозиция

- Метод предложен Хуангом и соавторами в 1998 году. Сигнал разделяется на внутренние модовые функции (IMF), для которых выполняются два условия: количество экстремумов и нулей различается не более чем на единицу, а среднее значение огибающих равно нулю.

2 Эмпирическая модовая декомпозиция (продолжение)

Поиск экстремумов

Определяются локальные максимумы и минимумы сигнала.

Построение огибающих

Экстремумы интерполируются кубическими сплайнами.

Вычитание среднего

Из сигнала вычитается среднее огибающих.

Проверка условий

Шаги 1–3 повторяются до выполнения условий IMF.

Выделение остатка

IMF вычитается из сигнала, процедура применяется к остатку.

2 Эмпирическая модовая декомпозиция (продолжение)

- Применение преобразования Гильберта к модам даёт мгновенную частоту и амплитуду.
- Основными проблемами EMD являются смешивание мод, краевые эффекты на границах сигнала и чувствительность к шуму.

3 Вариационная модовая декомпозиция

- Метод VMD предложен Драгомирецким и Зоссо в 2014 году. Он определяет K мод u_k, каждая из которых компактна около центральной частоты ω_k.

$$\min \sum_k \left\| \partial_t \left[\left(\delta(t) + j/\pi t\right) * u_k(t) \right] e^{-j\omega_k t} \right\|^2, \quad \sum_k u_k = x.$$

- Задача решается методом множителей Лагранжа (ADMM) в частотной области. Обновление моды имеет вид фильтра Винера:

$$\hat{u}_k(\omega) = \left(\hat{x}(\omega) - \sum_{i \neq k} \hat{u}_i(\omega) + \hat{\lambda}(\omega)/2 \right) / \left(1 + 2\alpha(\omega - \omega_k)^2 \right),$$

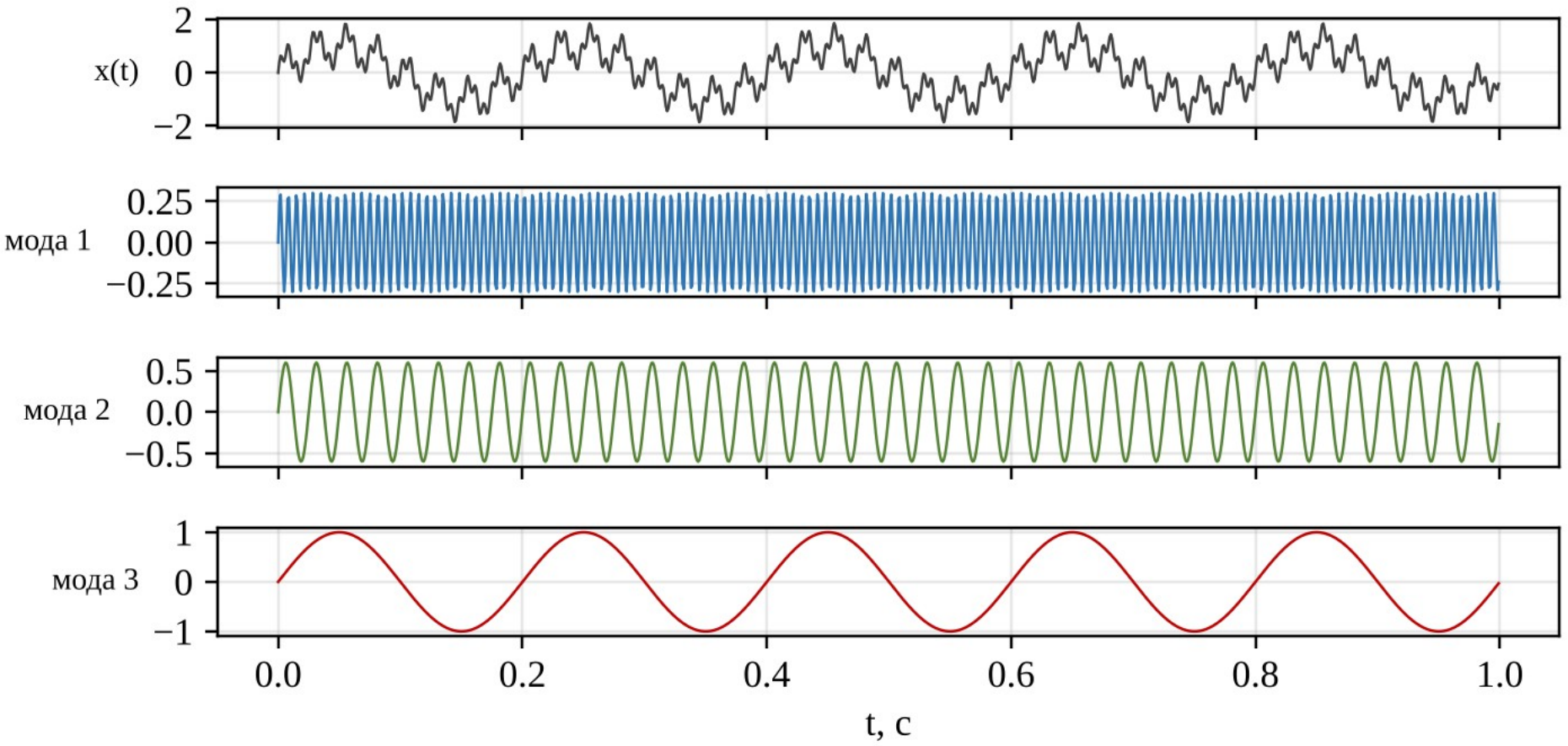
- а центральная частота вычисляется как центр тяжести спектра моды.

3 Вариационная модовая декомпозиция (продолжение)

- Параметр α определяет ширину полосы каждой моды, а число мод K задаётся заранее.

3

Вариационная модовая декомпозиция (продолжение)



Результат вариационной декомпозиции тестового сигнала

4 Сравнение EMD и VMD

Теоретическая основа

EMD является эмпирическим алгоритмом, а VMD опирается на строгую оптимизационную постановку.

Настройка

EMD почти не содержит параметров, VMD требует выбора K и α.

Устойчивость к шуму

Как правило, VMD более устойчив к шуму, тогда как EMD склонен к смешиванию мод.

Применимость к чирпу

Мода VMD по определению узкополосна, поэтому чирп с большим разбросом частот может быть разделён на несколько мод.

Краевые эффекты

Оба метода требуют правильной обработки границ, например зеркального продолжения.

5 Отбор мод по энтропийным критериям

- После разложения необходимо определить, какие из мод содержат сигнал. Применяются следующие подходы:
- вычисление энтропии спектра, перестановочной энтропии каждой моды и исключение мод, близких по значениям к шуму;
- анализ корреляции моды с исходным сигналом;
- сравнение с распределением энергии мод для шума (для EMD мод шума известны статистические закономерности, предложенные Ву и Хуангом в 2004 году);
- выбор K на основании резкого изменения энтропии или центральной частоты.
- Для практической работы существуют библиотеки, например PyEMD и vmdpy.

5 Вариационная модовая декомпозиция

Листинг 12.1.

```
import numpy as np

def vmd(x, K=3, alpha=2000, iters=500):
    X = np.fft.rfft(x)
    f = np.fft.rfftfreq(x.size)
    U = np.zeros((K, f.size), complex)
    w = np.geomspace(0.005, 0.2, K)
    for _ in range(iters):
        for k in range(K):
            U[k] = (X - U.sum(0) + U[k]) / (1 + 2 * alpha * (f - w[k])**2)
            P = np.abs(U[k])**2
            w[k] = (f * P).sum() / P.sum()
    return np.fft.irfft(U, x.size), w

fs = 1024
t = np.arange(fs) / fs
parts = [np.sin(2 * np.pi * 5 * t), 0.6 * np.sin(2 * np.pi * 40 * t),
         0.3 * np.sin(2 * np.pi * 150 * t)]
x = sum(parts)
```

5 Вариационная модовая декомпозиция (продолжение)

Листинг 12.1.

```
u, w = vmd(x)
print("Центральные частоты, Гц:", np.round(np.sort(w) * fs, 1))
for k, p in zip(np.argsort(w), parts):
    print(f"Корреляция моды с компонентой: {np.corrcoef(u[k], p)[0, 1]:.4f}")
```

5 Результат: Вариационная модовая декомпозиция

```
Центральные частоты, Гц: [  5.  40. 150.]
Корреляция моды с компонентой: 1.0000
Корреляция моды с компонентой: 1.0000
Корреляция моды с компонентой: 1.0000
```

Метод точно выделяет заданные частоты и формы компонент. Данные получены для синтетического сигнала без шума, тогда как в реальных данных итоговый результат зависит от выбора параметров K и α.

5 Эмпирическая модовая декомпозиция

Листинг 12.2.

```
from scipy.interpolate import CubicSpline
from scipy.signal import argrelextrema

def sift(x, t, n=10):
    h = x.copy()
    for _ in range(n):
        mx = argrelextrema(h, np.greater)[0]
        mn = argrelextrema(h, np.less)[0]
        if mx.size < 4 or mn.size < 4:
            return None
        up = CubicSpline(t[mx], h[mx])(t)
        lo = CubicSpline(t[mn], h[mn])(t)
        h -= (up + lo) / 2
    return h
```

5 Эмпирическая модовая декомпозиция (продолжение)

Листинг 12.2.

```
def emd(x, t, nmax=4):
    r, imfs = x.copy(), []
    for _ in range(nmax):
        h = sift(r, t)
        if h is None:
            break
        imfs.append(h)
        r -= h
    return imfs, r

imfs, r = emd(x, t)
m = fs // 8           # исключение краевых участков
for i, c in enumerate(imfs):
    f0 = np.fft.rfftfreq(c.size, 1 / fs)[np.abs(np.fft.rfft(c)).argmax()]
    print(f"IMF{i+1}: основная частота {f0:5.1f} Гц,"
          f" СКО {c[m:-m].std():.3f}")
```

5 Результат: Эмпирическая модовая декомпозиция

```
IMF1: основная частота 150.0 Гц, СКО 0.212
IMF2: основная частота  40.0 Гц, СКО 0.424
IMF3: основная частота   5.0 Гц, СКО 0.722
```

Как видно, каждая функция отражает отдельную компоненту исходного сигнала, причём первыми выделяются наиболее быстрые колебания.

6 Мгновенная частота и спектральный анализ Гильберта

- Для узкополосной моды вводится аналитический сигнал z(t) = u(t) + i H[u](t), где H – преобразование Гильберта.

$$f(t) = (1/2\pi)\, d\varphi/dt.$$

- Такое определение имеет физический смысл только для однокомпонентного сигнала, поэтому предварительная декомпозиция обязательна.
- Модификации EMD направлены на уменьшение проблем исходного метода. В алгоритме EEMD к сигналу многократно добавляется белый шум, вычисляются IMF, а затем результаты усредняются.
- Статистические свойства EMD для белого шума исследованы Ву и Хуангом, а также Фландреном и соавторами.

7 Настройка и варианты VMD

- Качество VMD зависит от числа мод K, параметра полосы α и способа инициализации центральных частот.
- Параметр α задаёт ширину полосы: большое значение формирует узкие моды, при малом моды становятся широкими и начинают перекрываться.
- Для чирпа, частота которого меняется быстро, стандартная VMD оказывается неэффективной, поскольку каждая мода должна быть узкополосной около постоянной центральной частоты.

8 Применение к гравитационно-волновым данным

Метод Гильберта–Хуанга применялся для анализа сигналов и изучения шума детекторов.

Очистка

Разложение отбелённых данных, расчёт энтропии мод и реконструкция по значимым компонентам.

Анализ глитчей

Определение мгновенной частоты и формирование признаков для классификации.

Подготовка признаков

Использование энтропии и энергии мод как входных признаков моделей машинного обучения.

Анализ стадии затухания

Выделение затухающих колебаний и оценка частоты и времени затухания.

При этом метод требует проверки на инъекциях. Обработка данных адаптивными методами нелинейна, поэтому амплитуда и фаза сигнала могут изменяться.

9 Разбор примера

1. Оценим полосу моды VMD. Фильтр в частотной области имеет вид $1/(1 + 2\alpha(f - \omega)^2)$ и убывает вдвое при $|f - \omega| = 1/\sqrt{(2\alpha)}$.
2. При $\alpha = 2000$ эта величина равна $1/\sqrt{4000} \approx 0{,}0158$ в нормированных частотах.
3. Для частоты дискретизации 1024 Гц это составляет приблизительно 16 Гц.
4. Значит, компоненты 5, 40 и 150 Гц разделены достаточно хорошо, а компоненты 40 и 45 Гц разделить при этих настройках не удастся.

10 Вопросы для обсуждения на занятии

Адаптация

Почему адаптивные методы рискуют «подстроиться» под шум?

Число мод

Какие признаки укажут на неправильный выбор K?

Чирп

Какие изменения необходимо внести в VMD для анализа быстро нарастающей частоты?

Контрольные вопросы

1. В чём преимущество адаптивных методов перед разложением по фиксированному базису?
2. Какие условия должна выполнять внутренняя модовая функция?
3. Опишите процедуру просеивания в методе EMD.
4. Что такое смешивание мод и какие методы служат для его устранения?
5. Сформулируйте вариационную постановку VMD.
6. Какова роль параметров K и α?
7. Сравните методы EMD и VMD в контексте анализа чирпа.
8. Как с помощью энтропии отбираются моды, содержащие сигнал?

Список литературы

1. Huang N.E., et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // Proceedings of the Royal Society A. – 1998. – Vol. 454. – P. 903–995.
2. Wu Z., Huang N.E. Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method // Advances in Adaptive Data Analysis. – 2009. – Vol. 1, No. 1. – P. 1–41.
3. Wu Z., Huang N.E. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method // Proceedings of the Royal Society A. – 2004. – Vol. 460. – P. 1597–1611.
4. Dragomiretskiy K., Zosso D. Variational mode decomposition // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2014. – Vol. 62, No. 3. – P. 531–544.
5. Torres M.E., Colominas M.A., Schlotthauer G., Flandrin P. A complete ensemble empirical mode decomposition with adaptive noise // Proc. IEEE ICASSP 2011. – Prague, 2011. – P. 4144–4147.