Техника исследования гравитационных волн

Лекция 13

Определение отношения сигнал/шум информационно-энтропийными методами

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

Цель и план лекции

Цель

Изучение способов оценки отношения сигнал/шум на основе энтропийных характеристик, построения градуировочных зависимостей и оценки точности таких методов по сравнению с классическим подходом.

1. Введение
2. Определения отношения сигнал/шум
3. Связь энтропии с отношением сигнал/шум
4. Методика оценки
5. Практические ограничения
6. Статистические свойства оценки
7. Многомасштабность и выбор полосы
8. Сравнение определений и ограничения

1 Введение

- Отношение сигнал/шум является главным показателем качества регистрации. В классическом подходе оно вычисляется с помощью согласованного фильтра и требует знания шаблона.

2 Определения отношения сигнал/шум

Энергетическое

Отношение мощностей сигнала и шума (в децибелах $10 \lg(P_s/P_n)$).

Для нестационарного сигнала зависит от длины окна.

Амплитудное

Отношение пикового значения к среднеквадратичному шуму.

Оптимальное (согласованное)

Величина $\rho = \sqrt{(h|h)}$, которая учитывает спектральную плотность шума. Для белого шума с единичной дисперсией ρ совпадает с корнем из суммы квадратов отсчётов сигнала.

Важно понимать различие: при сравнении методов необходимо использовать одно и то же определение.

3 Связь энтропии с отношением сигнал/шум

- Пусть нормированное распределение энергии получено из суммы сигнала и шума.

$$H \approx -\beta \ln(\beta/M) - (1-\beta) \ln((1-\beta)/(N-M)).$$

- Такая зависимость монотонна, но нелинейна. При низком значении ρ величина сигнальной части меньше статистического разброса энтропии и метод теряет чувствительность.

4 Методика оценки

Подготовка данных

Отбеливание, ограничение полосы, выделение окна, содержащего событие.

Выбор меры

Определение подходящего распределения. Как показывают расчёты, узкая полоса частот, содержащая сигнал, намного повышает чувствительность.

Градуировка

С помощью инъекций модельных сигналов известной амплитуды строится зависимость средней энтропии от ρ.

Обращение зависимости

Для измеренного значения энтропии определяется оценка ρ интерполяцией.

На малых значениях ρ кривая практически постоянна, поэтому диапазон использования метода ограничен снизу.

4 Методика оценки (продолжение)

Оценка погрешности

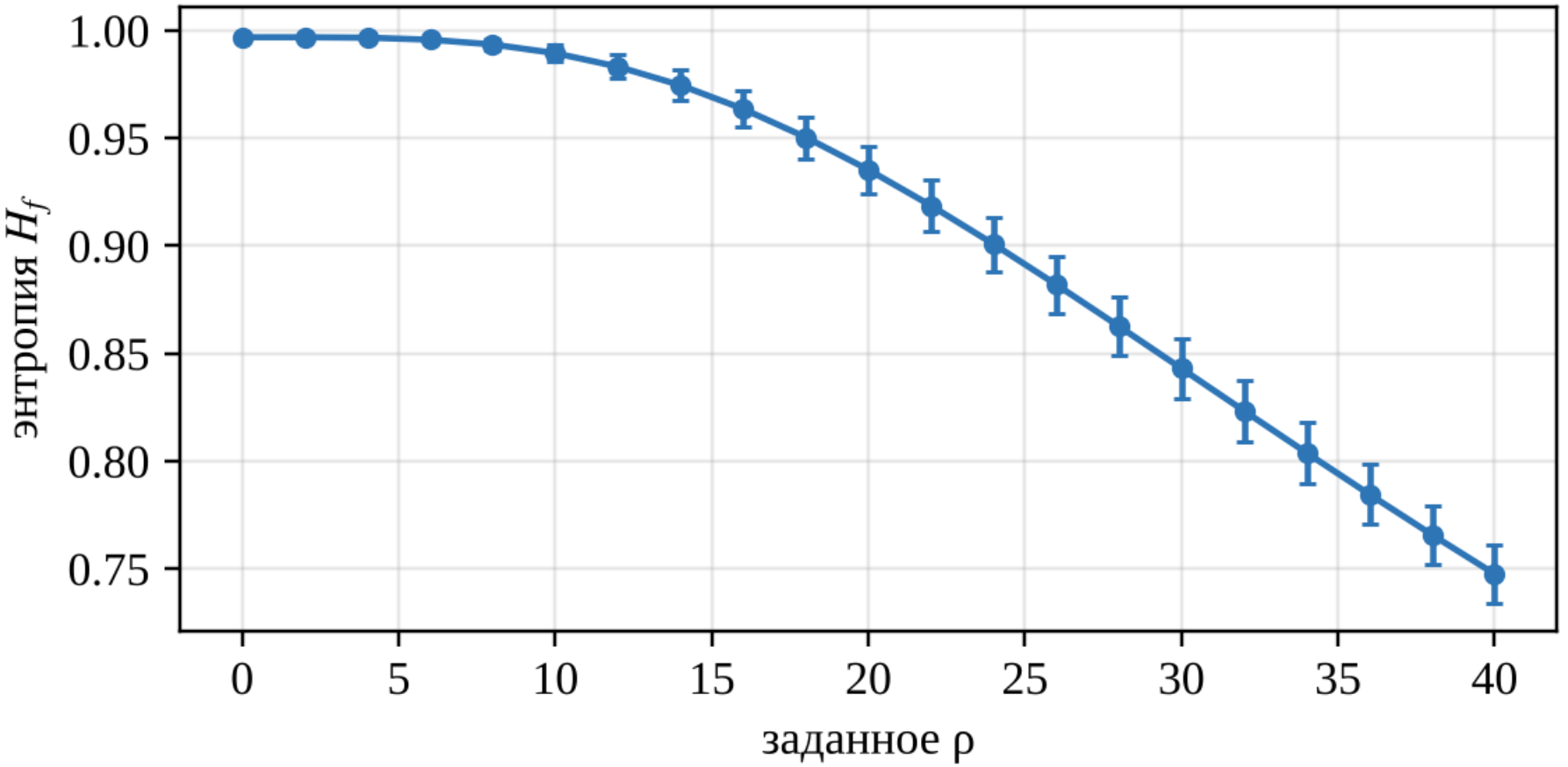
На независимых реализациях определяются среднее смещение и среднеквадратичная ошибка.

Определение области применимости

Находится минимальное значение ρ, при котором изменение энтропии превышает статистический разброс.

На малых значениях ρ кривая практически постоянна, поэтому диапазон использования метода ограничен снизу.

4 Методика оценки (продолжение)



Зависимость спектральной энтропии H_f от заданного отношения сигнал/шум

5 Практические ограничения

- Калибровочная зависимость справедлива только для определённого класса сигналов и спектра шума.
- Глитчи изменяют энтропию аналогично сигналу, поэтому необходима дополнительная проверка.
- Изменение длины окна и полосы требует повторной градуировки.
- Энтропийная оценка, как правило, уступает согласованной фильтрации, если форма сигнала известна; её преимущество состоит в независимости от шаблона.

5 Оценка SNR по спектральной энтропии

Листинг 13.1.

```
import numpy as np
from scipy import signal

def chirp(Mc, fs, T, flow=20):
    m = Mc * 4.925e-6
    t = np.arange(-T, 0, 1 / fs)
    tau = 1 / fs - t
    f = (5 / (256 * tau))**0.375 / (np.pi * m**0.625)
    ph = -2 * (5 * m)**-0.625 * tau**0.625
    h = (np.pi * m * f)**(2 / 3) * np.cos(ph)
    h[(f < flow) | (f > 3830 / Mc)] = 0
    return h / np.sqrt((h**2).sum())

def Hf(x, fs=4096, band=(20, 500)):
    f, _, P = signal.spectrogram(x, fs, nperseg=128, noverlap=96)
    p = P[(f >= band[0]) & (f <= band[1])].sum(1)
    p = p / p.sum()
    return -(p * np.log(p)).sum() / np.log(p.size)

fs, T = 4096, 1.0
h = chirp(28, fs, T)
```

5 Оценка SNR по спектральной энтропии (продолжение)

Листинг 13.1.

```
def mean_H(snr, seeds):
    return np.mean([Hf(np.random.default_rng(s).normal(size=h.size)
                       + snr * h) for s in seeds])

grid = np.arange(10, 61, 5.0)
curve = np.array([mean_H(s, range(60)) for s in grid])

print("Истинное rho   Оценка   Смещение   СКО")
for snr in (15, 25, 35, 50):
    H = [Hf(np.random.default_rng(1000 + k).normal(size=h.size)
            + snr * h) for k in range(100)]
    est = np.interp(H, curve[::-1], grid[::-1])
    print(f"{snr:12} {est.mean():8.1f} {est.mean() - snr:9.1f} "
          f"{est.std():6.1f}")
```

5 Результат: Оценка SNR по спектральной энтропии

Истинное rho	Оценка	Смещение	СКО
15	14.9	-0.1	1.3
25	25.1	0.1	1.3
35	35.2	0.2	1.4
50	50.3	0.3	1.6

Полученные результаты показывают, что погрешность оценки составляет единицы при достаточно большом ρ.

5 Сравнение с согласованным фильтром

Листинг 13.2.

```
snr = 25
rho_mf = []
for k in range(100):
    x = np.random.default_rng(2000 + k).normal(size=h.size) + snr * h
    rho_mf.append(np.fft.irfft(np.fft.rfft(x) * np.conj(np.fft.rfft(h)),
                               x.size).max())
print(f"Согласованный фильтр: среднее {np.mean(rho_mf):.1f}, "
      f"СКО {np.std(rho_mf):.1f}")
```

```
Согласованный фильтр: среднее 25.0, СКО 1.1
```

6 Статистические свойства оценки

- Рассмотрим более формально построение оценки ρ по энтропии. Пусть S(ρ) – средняя зависимость меры энтропии от заданного значения ρ, а $\sigma_s(\rho)$ – стандартное отклонение на независимых реализациях.

$$\sigma_\rho \approx \sigma_s(\rho) \,/\, |dS/d\rho|.$$

- Отсюда видно: на участке малой чувствительности, где производная близка к нулю, погрешность велика.
- Важным аспектом является неоднородность исходных данных. При смене PSD или длины сигнала калибровка изменится.
- Для уменьшения зависимости от формы сигнала можно использовать набор различных энтропийных признаков и регрессию.

7 Многомасштабность и выбор полосы

- Чувствительность спектральной энтропии возрастает при уменьшении анализируемой полосы до полосы сигнала: иначе мощность шума в посторонних частотах разбавляет эффект.
- Другой подход основан на расчёте энтропии на частотно-временной плоскости при нескольких разрешениях.

8 Сравнение определений и ограничения

- Различные определения SNR приводят к разным численным значениям, которые необходимо согласовывать.
- Сравнивая согласованный фильтр и энтропийную оценку, необходимо учитывать, что значение согласованного фильтра оптимально лишь при правильном шаблоне.
- Энтропийная оценка позволяет выполнить быструю проверку данных, не требующую банка шаблонов.

9 Разбор примера

1. Применим двухуровневую модель при $N = 100$ и $M = 10$.

2. При $\beta = 0{,}1$ энергия равномерно распределена по всем компонентам ($M/N = \beta$), $H = \ln 100 = 4{,}605$, и нормированная энтропия равна 1.

3. При $\beta = 0{,}5$: $H = -0{,}5 \ln(0{,}5/10) - 0{,}5 \ln(0{,}5/90) = 1{,}498 + 2{,}597 = 4{,}094$, а нормированное значение равно $4{,}094/4{,}605 \approx 0{,}889$.

4. Таким образом, концентрация половины энергии в 10 % компонент уменьшает энтропию на 11 %.

10 Вопросы для обсуждения на занятии

Точность

На каком участке градуировочной кривой оценка ρ наиболее надёжна?

Применимость

Как изменится градуировка при переходе к реальному окрашенному шуму?

Сравнение

Какие эксперименты покажут преимущество энтропийной оценки над согласованным фильтром?

Контрольные вопросы

1. Какие определения отношения сигнал/шум используются на практике?
2. Почему энтропия убывает с ростом отношения сигнал/шум?
3. Какие этапы включает процедура энтропийной оценки отношения сигнал/шум?
4. Что ограничивает применимость метода при малых значениях ρ?
5. Как полоса частот влияет на чувствительность энтропийной оценки?
6. Как оценивается смещение и точность метода?
7. В каких условиях энтропийная оценка уступает согласованному фильтру, а в каких она полезна?
8. Как глитчи влияют на результат оценки?

Список литературы

1. Abbott B.P., et al. A guide to LIGO–Virgo detector noise and extraction of transient gravitational-wave signals // Classical and Quantum Gravity. – 2020. – Vol. 37, No. 5. – Art. 055002. – DOI: 10.1088/1361-6382/ab685e.
2. Cutler C., Flanagan É.E. Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform? // Physical Review D. – 1994. – Vol. 49. – P. 2658–2697.
3. Finn L.S., Chernoff D.F. Observing binary inspiral in gravitational radiation: One interferometer // Physical Review D. – 1993. – Vol. 47. – P. 2198–2219.
4. Shannon C.E. A mathematical theory of communication // Bell System Technical Journal. – 1948. – Vol. 27. – P. 379–423, 623–656.
5. Powell G.E., Percival I.C. A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of Hamiltonian systems // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1979. – Vol. 12. – P. 2053–2071.
6. Bandt C., Pompe B. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series // Physical Review Letters. – 2002. – Vol. 88. – Art. 174102.