# Техника исследования гравитационных волн

*Лекция 7*

# Методы обработки и фильтрации астрофизических сигналов

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

# Цель и план лекции

## Цель

Изучение основных методов обработки и фильтрации зашумлённых сигналов, теоретических основ согласованной фильтрации, а также приобретение навыков их применения и сравнения.

1. Введение
2. Предварительная обработка
3. Линейные фильтры
4. Согласованная фильтрация
5. Сравнение подходов
6. Чувствительность к параметрам шаблона
7. Поиск сигналов без модели
8. Оптимальность согласованного фильтра

# 1 Введение

- Цель обработки данных – выделить информацию об астрофизическом источнике при наличии шумов, превышающих сигнал по амплитуде.

# 2 Предварительная обработка

### Устранение тренда и оконная функция

Применение окна Тьюки или Ханна уменьшает спектральную утечку на границах сегмента.

### Полосовая фильтрация

Ограничивает обработку полосой, в которой присутствует сигнал. Применение прямого и обратного прохода (`filtfilt`) обеспечивает нулевой фазовый сдвиг, но требует наличия полного участка данных.

### Режекторная фильтрация

Подавляет узкие спектральные линии (сетевые гармоники, скрипичные моды).

### Отбеливание

Деление спектра на $\sqrt{S_n(f)}$, что выравнивает мощность шума по всем частотам.

# 2 Предварительная обработка (продолжение)

### Понижение частоты дискретизации

Уменьшает объём данных при условии предварительной антиалиасинговой фильтрации.

# 3 Линейные фильтры

- Простейшим решением является частотно-избирательный фильтр. Он эффективен только при условии, что спектр сигнала и шума разделены.
- Фильтр Винера минимизирует среднеквадратичную ошибку оценки сигнала и имеет передаточную функцию:

$$H(f) = S_s(f) / ( S_s(f) + S_n(f) ),$$

- где $S_s(f)$ – спектральная плотность мощности сигнала. Для его применения требуется априорная информация о спектрах.

# 4 Согласованная фильтрация

- Если форма сигнала известна, то оптимальным по критерию максимума отношения сигнал/шум для линейных фильтров является согласованный фильтр.

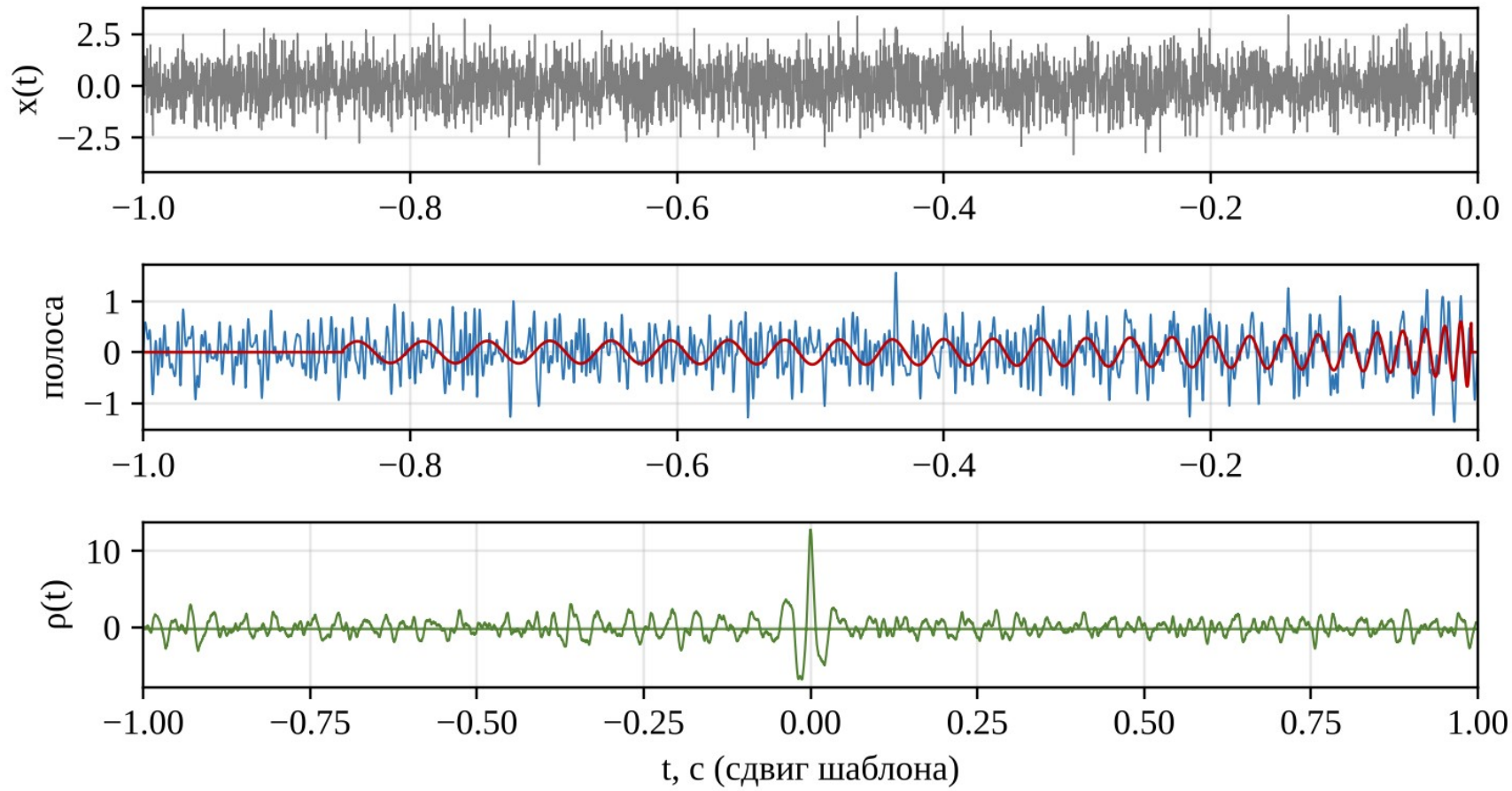
$$(a \mid b) = 4\,\mathrm{Re} \int \tilde{a}(f)\,\tilde{b}^{*}(f) \,/\, S_n(f)\,df.$$

- Тогда для шаблона h, нормированного условием (h|h) = 1, отношение сигнал/шум как функция времени прибытия вычисляется по формуле:

$$\rho(t) = 4 \left| \int \tilde{s}(f)\,\tilde{h}^{*}(f) \,/\, S_n(f) \cdot e^{2\pi i f t}\,df \right|.$$

- Эта операция выполняется с помощью быстрого преобразования Фурье и даёт зависимость ρ от задержки.

# 4 Согласованная фильтрация (продолжение)




*Исходные данные, результат полосовой фильтрации и выход согласованного фильтра*

# 4 Согласованная фильтрация (продолжение)

- Для охвата пространства параметров используют банк шаблонов. Он содержит сотни тысяч форм сигнала, размещённых так, чтобы потери ρ из-за дискретности сетки не превышали заданной величины (как правило, 3 %).
- Поскольку глитчи способны создать большие значения ρ, применяют дополнительную статистику $\chi^2$ (Аллен, 2005): шаблон делится на частотные полосы и проверяется, распределён ли вклад в ρ так, как ожидается для настоящего сигнала.

# 5 Сравнение подходов

- Полосовой фильтр прост и не требует шаблона, но не обеспечивает оптимальности.
- Винеровский фильтр минимизирует ошибку, если спектры известны.
- Согласованный фильтр оптимален при известной форме сигнала и гауссовом шуме.
- Методы частотно-временного анализа и адаптивная декомпозиция подходят для сигналов неизвестной формы, но менее чувствительны.
- Метод оценивается по коэффициенту корреляции с истинным сигналом.

# 5 Сравнение методов фильтрации

Листинг 7.1.

```
import numpy as np
from scipy import signal

fs, T, Mc = 4096, 2.0, 28.0

def chirp(Mc, fs, T, flow=20):
    m = Mc * 4.925e-6
    t = np.arange(-T, 0, 1 / fs)
    tau = 1 / fs - t
    f = (5 / (256 * tau))**0.375 / (np.pi * m**0.625)
    ph = -2 * (5 * m)**-0.625 * tau**0.625
    h = (np.pi * m * f)**(2 / 3) * np.cos(ph)
    h[(f < flow) | (f > 3830 / Mc)] = 0
    return t, h / np.sqrt((h**2).sum())

t, h = chirp(Mc, fs, T)
rng = np.random.default_rng(3)
snr = 15
x = rng.normal(size=t.size) + snr * h

def corr(a, b):
    return (a @ b) / np.sqrt((a @ a) * (b @ b))
```

# 5 Сравнение методов фильтрации (продолжение)

Листинг 7.1.

```
sos = signal.butter(6, [20, 200], "band", fs=fs, output="sos")
y1 = signal.sosfiltfilt(sos, x)

H = np.abs(np.fft.rfft(snr * h))**2
y2 = np.fft.irfft(np.fft.rfft(x) * H / (H + x.size), x.size)

rho = np.fft.irfft(np.fft.rfft(x) * np.conj(np.fft.rfft(h)), x.size)

print(f"Исходный ряд, корреляция с h:  {corr(x, h):.3f}")
print(f"Полосовой фильтр:              {corr(y1, h):.3f}")
print(f"Винеровский (спектр известен): {corr(y2, h):.3f}")
print(f"Согласованный фильтр, max rho: {rho.max():.1f} (ввод: {snr})")
```

# 5 Результат: Сравнение методов фильтрации

```
Исходный ряд, корреляция с h:  0.162
Полосовой фильтр:              0.440
Винеровский (спектр известен): 0.709
Согласованный фильтр, max rho: 15.0 (ввод: 15)
```

Следует помнить, что в реальных условиях спектры и форма сигнала известны только приближённо.

# 6 Чувствительность к параметрам шаблона

- При несоответствии шаблона истинному сигналу значение ρ уменьшается. Степень соответствия определяется как перекрытие нормированных форм сигнала, называемое совпадением (match).

# 6 Зависимость отклика от чирп-массы шаблона

Листинг 7.2.

```
print("Mc шаблона   Отклик rho")
X = np.fft.rfft(x)
for Mt in (24.0, 27.0, 27.5, 28.0, 28.5, 29.0, 32.0):
    _, ht = chirp(Mt, fs, T)
    r = np.fft.irfft(X * np.conj(np.fft.rfft(ht)), x.size).max()
    print(f"{Mt:10.1f} {r:11.1f}")
```

```
Mc шаблона   Отклик rho
      24.0         7.5
      27.0        10.1
      27.5        10.5
      28.0        15.0
      28.5         9.3
      29.0        11.3
      32.0         8.9
```

# 7 Поиск сигналов без модели

- Если модель сигнала отсутствует, используют поиск избытка энергии. Данные преобразуются в частотно-временное представление, в нём выделяются кластеры пикселей с мощностью выше порога.

# 8 Оптимальность согласованного фильтра

- Рассмотрим линейный фильтр с импульсной характеристикой, применённый к данным s = h + n.

$$Q(f) \propto \tilde{h}^{*}(f) \,/\, S_{n}(f).$$

- Именно это выражение объясняет алгоритм: сначала данные отбеливаются, а затем сравниваются с отбелённым шаблоном.
- Неизвестные фаза и момент прихода сигнала обрабатываются аналитически. Для учёта фазы вычисляют комплексный выход фильтра: действительная и мнимая части соответствуют двум квадратурам шаблона, а |z| не зависит от фазы.

# 9 Построение банка шаблонов

- Метрика параметрического пространства определяется через совпадение M между шаблонами:

$$M(\lambda, \lambda + \Delta\lambda) \approx 1 - g_{ij}\,\Delta\lambda^i\,\Delta\lambda^j.$$

- Плотность размещения определяется метрикой g. Важным удобным выбором координат являются чирп-времена $\tau_0$ и $\tau_3$, в которых метрика приблизительно постоянна.
- Минимальное совпадение MM = 0,97 означает, что потеря ρ не превышает 3 %. Поскольку объём пространства ∝ $\rho^3$, потеря частоты событий равна приблизительно $1 - 0{,}97^3 \approx 8{,}7$ %.

# 10 Подходы к поиску и оценка фона

- Для уменьшения влияния глитчей выполняются последовательные этапы. Сначала для каждого детектора отбираются пики ρ выше порога.

$$\hat{\rho} = \rho \, [\, (1 + (\chi_r^2)^3) \,/\, 2 \,]^{-1/6} \quad при \; \chi_r^2 > 1,$$

- где $\chi_r^2$ – приведённое значение $\chi^2$. При малом $\chi^2$ $\hat{\rho}$ равно ρ.
- Частота ложных срабатываний определяется методом временных сдвигов: данные одного детектора сдвигают относительно другого на величину, превышающую время пролёта.

# 11 Адаптивная фильтрация и шаблоны с неточной формой

- Если вспомогательный канал коррелирует с помехой, применяется адаптивное вычитание шума.

# 12 Разбор примера

1. В белом шуме с единичной дисперсией для нормированного шаблона ожидаемое значение $\rho$ равно заданной амплитуде.
2. Для шаблона с минимальным совпадением 0,97 и $\rho = 15$ ожидаемая потеря равна $15 \cdot 0{,}03 = 0{,}45$, то есть $\rho \approx 14{,}55$.
3. При этом потери детектируемых событий составляют 8,7 %.
4. Если выбрать совпадение 0,9, потери составят $1 - 0{,}9^3 \approx 27$ %, но количество шаблонов существенно сократится.

# 13 Вопросы для обсуждения на занятии

### Модели

Что случится с согласованным фильтром, если сигнал содержит эффект, не описанный шаблоном?

### Фон

Почему временные сдвиги работают только при наличии двух и более детекторов?

### Компромиссы

Как определить допустимую плотность банка шаблонов при ограниченных вычислительных ресурсах?

# Контрольные вопросы

1. Какие этапы включает предварительная обработка данных детектора?
2. Почему простой полосовой фильтр недостаточен для выделения сигнала?
3. Запишите передаточную функцию фильтра Винера и поясните её смысл.
4. В чём состоит идея согласованной фильтрации?
5. Что такое банк шаблонов и как определяется его плотность?
6. Для чего используется $\chi^2$-тест?
7. Как оценивается значимость обнаруженного сигнала?
8. Какие методы применяются для сигналов неизвестной формы?

# Список литературы


1. Abbott B.P., et al. A guide to LIGO–Virgo detector noise and extraction of transient gravitational-wave signals // Classical and Quantum Gravity. – 2020. – Vol. 37, No. 5. – Art. 055002. – DOI: 10.1088/1361-6382/ab685e.
2. Allen B., Anderson W.G., Brady P.R., Brown D.A., Creighton J.D.E. FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries // Physical Review D. – 2012. – Vol. 85. – Art. 122006.
3. Allen B. $\chi^2$ time-frequency discriminator for gravitational wave detection // Physical Review D. – 2005. – Vol. 71. – Art. 062001.
4. Owen B.J., Sathyaprakash B.S. Matched filtering of gravitational waves from inspiraling compact binaries: Computational cost and template placement // Physical Review D. – 1999. – Vol. 60. – Art. 022002.
5. Usman S.A., et al. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence // Classical and Quantum Gravity. – 2016. – Vol. 33. – Art. 215004.
6. Klimenko S., et al. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors // Physical Review D. – 2016. – Vol. 93. – Art. 042004.
7. Wiener N. Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series. – Cambridge, MA: MIT Press, 1949.
8. Maggiore M. Gravitational Waves. Volume 1: Theory and Experiments. – Oxford: Oxford University Press, 2008.