Техника исследования гравитационных волн

Лекция 11

Вейвлет-анализ гравитационных волн

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

Цель и план лекции

Цель

Изучение теоретических основ вейвлет-преобразования, его применения к анализу частотно-временной структуры нестационарных гравитационно-волновых сигналов и связи с энтропийными характеристиками.

1. Введение
2. Непрерывное вейвлет-преобразование
3. Виды вейвлет-преобразований
4. Применение в анализе гравитационных волн
5. Вейвлет-энтропия
6. Частотно-временные распределения
7. Многокомпонентные и многодетекторные методы
8. Практические вопросы реализации

1 Введение

- Преобразование Фурье показывает, какие частоты присутствуют в сигнале, однако теряет информацию о моменте их появления.

2 Непрерывное вейвлет-преобразование

- Непрерывное вейвлет-преобразование (CWT) сигнала x(t) определяется как свёртка с масштабированным и сдвинутым материнским вейвлетом ψ:

$$W(a, b) = |a|^{-1/2} \int x(t)\ \psi^*((t - b)/a)\ dt,$$

- где a – масштаб, а b – сдвиг. Материнский вейвлет имеет нулевое среднее значение и должен удовлетворять условию допустимости.

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}\ exp(i\omega_0 t)\ exp(-t^2/2).$$

- Параметр ω_0 определяет соотношение времени и частоты: увеличение ω_0 улучшает разрешение по частоте и ухудшает разрешение по времени.

2 Непрерывное вейвлет-преобразование (продолжение)

- Разрешение ограничено принципом неопределённости Гейзенберга–Габора: $\Delta t \cdot \Delta f \geq 1/(4\pi)$.

3 Виды вейвлет-преобразований

Дискретное вейвлет-преобразование (DWT)

Использует диадические масштабы и обеспечивает разложение без избыточности.

Вейвлет-пакеты

Расщепляют и детализирующие, и аппроксимирующие коэффициенты, что позволяет применять поиск наилучшего базиса по энтропийному критерию.

Q-преобразование

Вариант с постоянной добротностью Q, используемый при анализе событий в LIGO (Чаттерджи и др., 2004).

Преобразование Вильсона–Добеши–Мейера (WDM)

Используется в конвейере coherent WaveBurst для поиска сигналов без шаблонов на основе кластеров энергии, когерентных в различных детекторах.

4 Применение в анализе гравитационных волн

Визуализация

Скалограмма показывает ход частоты сигнала во времени и позволяет отличить его от шума.

Поиск без шаблонов

Обнаружение кластеров с энергией выше порога. Алгоритм Omicron использует этот принцип для каталогизации глитчей.

Удаление помех

Реконструкция при отбрасывании коэффициентов, соответствующих шуму. Так, алгоритм BayesWave использует фреймы вейвлетов Морле–Габора для моделирования сигнала и глитчей.

Извлечение признаков

Вейвлет-коэффициенты служат входными данными для методов машинного обучения.

Штриховая линия показывает теоретическую зависимость частоты от времени для инспирального приближения.

4 Применение в анализе гравитационных волн (продолжение)

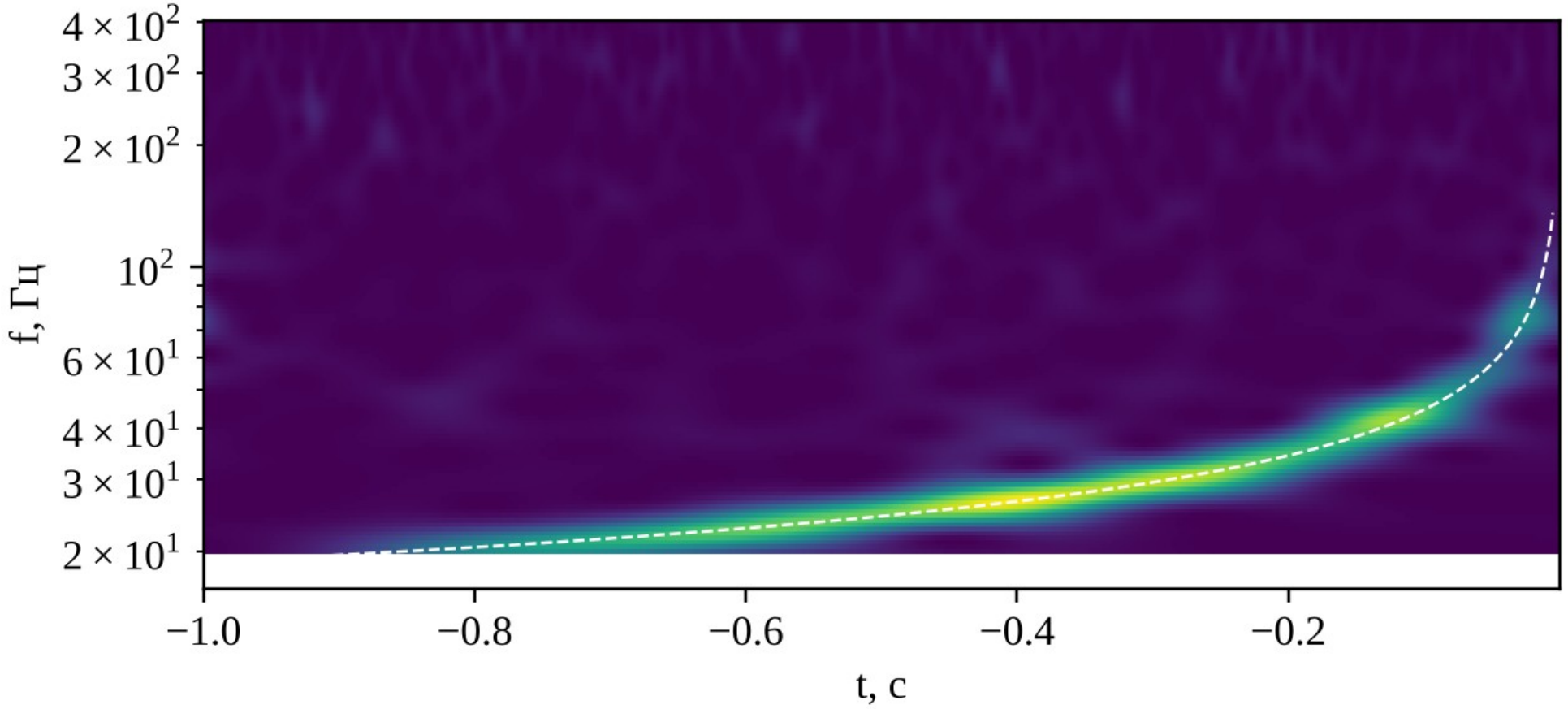
Расчёт энтропии

На основе распределения энергии вычисляется вейвлет-энтропия.

Штриховая линия показывает теоретическую зависимость частоты от времени для инспирального приближения.

4

Применение в анализе гравитационных волн (продолжение)



Скалограмма модельного сигнала и теоретическая зависимость f(t)

5 Вейвлет-энтропия

- Распределение энергии по масштабам j можно нормировать:

$$p_j = E_j / \Sigma E_j, \quad H_W = -\Sigma\, p_j \ln p_j.$$

- Малое значение H_W означает, что энергия сосредоточена на небольшом числе масштабов, и это указывает на наличие упорядоченного сигнала.

- Также определяется частота с максимальной энергией во времени и сравнивается с теоретическим значением.

5 CWT с вейвлетом Морле

Листинг 11.1.

```
import numpy as np

def chirp(Mc, fs, T, flow=20):
    m = Mc * 4.925e-6
    t = np.arange(-T, 0, 1 / fs)
    tau = 1 / fs - t
    f = (5 / (256 * tau))**0.375 / (np.pi * m**0.625)
    ph = -2 * (5 * m)**-0.625 * tau**0.625
    h = (np.pi * m * f)**(2 / 3) * np.cos(ph)
    h[(f < flow) | (f > 3830 / Mc)] = 0
    return t, h / np.sqrt((h**2).sum()), f

def cwt(x, fs, freqs, w0=10):
    X = np.fft.fft(x)
    om = 2 * np.pi * np.fft.fftfreq(x.size, 1 / fs)
    W = np.empty((freqs.size, x.size), complex)
    for i, f in enumerate(freqs):
        s = w0 / (2 * np.pi * f)
        psi = np.exp(-0.5 * (s * om - w0)**2) * (om > 0)
        W[i] = np.fft.ifft(X * psi) * np.sqrt(s * fs)
    return W
```

5 CWT с вейвлетом Морле (продолжение)

Листинг 11.1.

```
fs, T = 4096, 1.0
t, h, ftrue = chirp(28, fs, T)
rng = np.random.default_rng(5)
x = rng.normal(size=t.size) + 30 * h

F = np.geomspace(20, 400, 120)
W = cwt(x, fs, F)
P = np.abs(W)**2

for tq in (-0.5, -0.2, -0.05):
    i = np.argmin(abs(t - tq))
    print(f"t={tq:5.2f} c: f(CWT) = {F[P[:, i].argmax()]:5.1f} Гц, "
          f"теория {ftrue[i]:5.1f} Гц")
```

5 Результат: CWT с вейвлетом Морле

```
t=-0.50 с: f(CWT) =  24.5 Гц, теория  24.4 Гц
t=-0.20 с: f(CWT) =  33.9 Гц, теория  34.4 Гц
t=-0.05 с: f(CWT) =  54.7 Гц, теория  57.8 Гц
```

Определение следа частоты подтверждает, что скалограмма позволяет оценить изменение частоты и, следовательно, значение чирп-массы.

5 Вейвлет-энтропия по масштабам

Листинг 11.2.

```
def wave_entropy(x):
    E = (np.abs(cwt(x, fs, F))**2).sum(axis=1)
    E = E / F           # учёт логарифмической сетки частот
    p = E / E.sum()
    return -(p * np.log(p)).sum() / np.log(p.size)

print("SNR  H_W (среднее по 20 реализациям)")
for snr in (0, 15, 30, 60):
    H = [wave_entropy(np.random.default_rng(s).normal(size=t.size)
                      + snr * h) for s in range(20)]
    print(f"{snr:3}  {np.mean(H):.4f} +- {np.std(H):.4f}")
```

```
SNR  H_W (среднее по 20 реализациям)
  0  0.9230 +- 0.0205
 15  0.8226 +- 0.0170
 30  0.7748 +- 0.0099
 60  0.7541 +- 0.0051
```

6 Частотно-временные распределения

- Кратковременное преобразование Фурье даёт спектрограмму – квадрат модуля коэффициентов.
- Преобразование синхронного сжатия (synchrosqueezing, Добеши и др., 2011) перемещает энергию вейвлет-коэффициентов в окрестность мгновенной частоты.
- Важно понимать, что кривая частоты сигнала сближения характеризуется скоростью $\dot{f}$.

7 Многокомпонентные и многодетекторные методы

- Для поиска сигналов без шаблонов требуется связывать пиксели в кластеры. В конвейере coherent WaveBurst из частотно-временных коэффициентов нескольких детекторов формируется сеть кластеров, для которых вычисляется когерентная статистика.
- Алгоритм BayesWave моделирует сигнал и глитчи как сумму вейвлетов Морле–Габора, причём число компонент определяется трансмерным MCMC. Сигнал обязан быть когерентным в сети детекторов, а глитч – независимым.
- Для быстрого поиска чирпа были предложены специальные преобразования: например, чирплеты и метод Хафа, позволяющий определять параметризованные кривые на спектрограмме.
- Для использования изображений скалограмм в нейронных сетях необходимо стандартизировать сетку частот, нормировку и центрирование событий.

8 Практические вопросы реализации

- При вычислении CWT через БПФ подразумевается периодичность сигнала, поэтому возникает краевой эффект, охватывающий область порядка $\sqrt{2} \cdot a$ вблизи границ, называемая конусом влияния.
- Для статистической оценки значимости локальных пиков применяют сравнение с уровнем белого или красного шума (Торренс и Компо, 1998).

9 Разбор примера

1. Найдём параметры вейвлета Морле при $\omega_0 = 6$ и масштабе $a = 0{,}01$ с.

2. Центральная частота $f = \omega_0/(2\pi a) = 6/(0{,}0628) \approx 95{,}5$ Гц.

3. Для распределения энергии $|\psi|^2$ ширина по времени $\sigma_t = a/\sqrt{2} \approx 7{,}1$ мс, а ширина по частоте $\sigma_f = 1/(2\sqrt{2}\,\pi\, a) \approx 11{,}3$ Гц.

4. Произведение $\sigma_t\sigma_f = 1/(4\pi) \approx 0{,}0796$ соответствует минимуму неравенства неопределённости.

5. Добротность составляет около $95{,}5/11{,}3 \approx 8{,}5$.

10 Вопросы для обсуждения на занятии

Выбор преобразования

Какое представление лучше подходит для визуального анализа чирпа и для поиска глитча?

Параметры

Какие последствия имеет выбор очень большого значения ω_0 для анализа стадии слияния?

Сеть

Каким образом когерентность между детекторами отличает сигнал от глитча?

Контрольные вопросы

1. В чём недостатки преобразования Фурье при анализе чирпа?
2. Запишите определение непрерывного вейвлет-преобразования.
3. Как параметр ω_0 влияет на разрешение вейвлета Морле?
4. Что такое скалограмма и какая информация в ней содержится?
5. В чём заключается особенность Q-преобразования?
6. Какие вейвлет-методы используются при поиске сигналов без шаблонов?
7. Как определяется вейвлет-энтропия и что означает её малое значение?
8. Как выбор сетки масштабов влияет на расчёт вейвлет-энтропии?

Список литературы

1. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way. – 3rd ed. – Burlington: Academic Press, 2009.
2. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. – Philadelphia: SIAM, 1992.
3. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. – 1998. – Vol. 79, No. 1. – P. 61–78.
4. Chatterji S., Blackburn L., Martin G., Katsavounidis E. Multiresolution techniques for the detection of gravitational-wave bursts // Classical and Quantum Gravity. – 2004. – Vol. 21. – P. S1809–S1818.
5. Klimenko S., et al. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors // Physical Review D. – 2016. – Vol. 93. – Art. 042004.
6. Cornish N.J., Littenberg T.B. BayesWave: Bayesian inference for gravitational wave bursts and instrument glitches // Classical and Quantum Gravity. – 2015. – Vol. 32. – Art. 135012.
7. Robinet F., et al. Omicron: A tool to characterize transient noise in gravitational-wave detectors // SoftwareX. – 2020. – Vol. 12. – Art. 100620.
8. Abbott B.P., et al. A guide to LIGO–Virgo detector noise and extraction of transient gravitational-wave signals // Classical and Quantum Gravity. – 2020. – Vol. 37, No. 5. – Art. 055002. – DOI: 10.1088/1361-6382/ab685e.