Техника исследования гравитационных волн

Лекция 8

Теория информации и энтропия в анализе сигналов

Усіпов Н.М., PhD · КазНУ имени аль-Фараби

Цель и план лекции

Цель

Изучение основных понятий теории информации, определений энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса, а также способов преобразования сигнала в распределение вероятностей для расчёта энтропийных характеристик.

1. Введение
2. Энтропия Шеннона
3. Обобщённые энтропии
4. От сигнала к распределению вероятностей
5. Спектральная энтропия сигнала
6. Энтропия непрерывных величин и взаимная информация
7. Выбор порядка и настройка параметров
8. Энтропия и гравитационно-волновой анализ

1 Введение

- Традиционная обработка сигналов опирается на описание шума и сигнала в терминах мощности.

2 Энтропия Шеннона

- Клод Шеннон в 1948 году определил меру неопределённости дискретного распределения вероятностей p_i:

$$H = -\sum p_i \log p_i.$$

- Основные свойства:

2 Энтропия Шеннона (продолжение)

Неотрицательность

$H \geq 0$, причём $H = 0$ только при полной определённости исхода.

Максимум

Наибольшее значение $\ln N$ достигается при равномерном распределении. Обычно для сравнения используется нормированная энтропия $H / \ln N$.

Аддитивность

Для независимых систем $H(A, B) = H(A) + H(B)$.

Взаимная информация

$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$ показывает, какой объём информации об одной величине содержится в другой.

2 Энтропия Шеннона (продолжение)

Дивергенция Кульбака–Лейблера

$D(P\|Q) = \Sigma\, p_i \log\,(p_i/q_i)$ измеряет различие распределений. Применяется при сравнении распределения данных с эталоном шума, а также при байесовском выводе.

3 Обобщённые энтропии

- Шеннон рассматривал среднее значение логарифма вероятности. Введение параметра порядка позволяет регулировать чувствительность к редким или частым событиям.
- Энтропия Реньи (1961):

$$H_\alpha = (1 / (1 - \alpha)) \log \Sigma\, p_i^\alpha, \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1.$$

- Энтропия Тсаллиса (1988):

$$S_q = (1 - \Sigma\, p_i^q) / (q - 1), \quad q \neq 1.$$

- При α, q → 1 обе величины переходят в энтропию Шеннона. Основные отличия:

3 Обобщённые энтропии (продолжение)

Порядок

Значения $\alpha < 1$ увеличивают вклад малых вероятностей, значения $\alpha > 1$ – вклад преобладающих компонент, поэтому большие значения полезны для выделения пиков.

Аддитивность

Энтропия Реньи аддитивна для независимых систем. Энтропия Тсаллиса неаддитивна: $S_q(A,B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$.

Связь

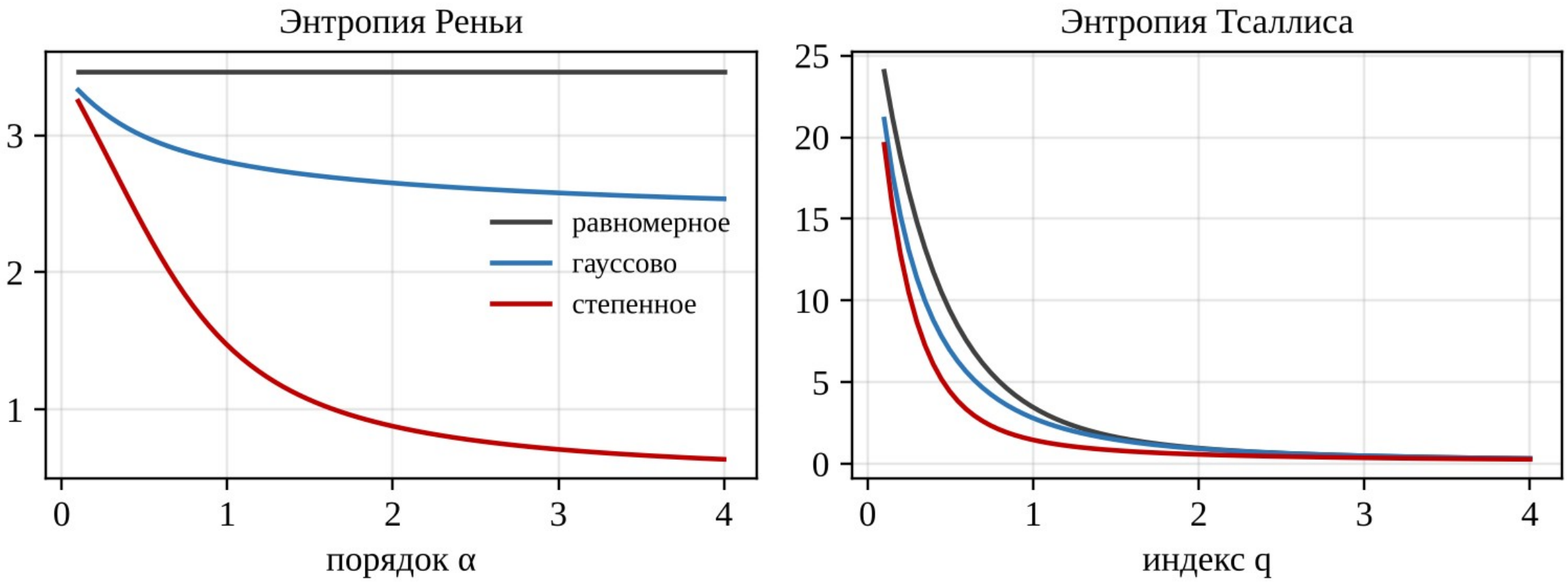
Оба выражения связаны однозначным преобразованием через величину Σp_i^q.

Применение

Неаддитивность используется в качестве модели для систем с долговременными корреляциями и тяжёлыми хвостами распределений.

Равномерное распределение имеет постоянную энтропию Реньи, равную $\ln N$, тогда как для распределений с концентрацией вероятности значение уменьшается с ростом порядка.

3 Обобщённые энтропии (продолжение)



Зависимость энтропии Реньи и Тсаллиса от порядка для разных распределений

4 От сигнала к распределению вероятностей

Энтропия определяется для распределения, поэтому первым шагом является выбор способа его построения по сигналу.

Гистограмма амплитуд

Вероятности оцениваются по частотам попадания значений в интервалы. Метод игнорирует порядок отсчётов и потому слабо отражает временную структуру.

Спектральная энтропия

В качестве распределения выступает нормированный спектр мощности $p_k = P(f_k) / \Sigma P(f_k)$.

Временное распределение энергии

Нормированная мощность по окнам времени; значение уменьшается при локализованных по времени событиях.

Частотно-временное распределение

Нормированная спектрограмма или вейвлет-коэффициенты, которые объединяют обе локализации.

4 От сигнала к распределению вероятностей (продолжение)

Символьная динамика

Распределение паттернов упорядочивания значений, используемое в перестановочной энтропии (лекция 9).

4 От сигнала к распределению вероятностей (продолжение)

- Статистическая оценка энтропии имеет смещение, зависящее от объёма выборки: в выражении для шенноновской энтропии смещение отрицательно и составляет приблизительно $(N_{bin}-1)/(2N)$.

4 Реализация энтропий Шеннона, Реньи и Тсаллиса

Листинг 8.1.

```
import numpy as np

def shannon(p):
    p = p[p > 0]
    return -(p * np.log(p)).sum()

def renyi(p, a):
    p = p[p > 0]
    return shannon(p) if a == 1 else np.log((p**a).sum()) / (1 - a)

def tsallis(p, q):
    p = p[p > 0]
    return shannon(p) if q == 1 else (1 - (p**q).sum()) / (q - 1)

p = np.array([0.5, 0.25, 0.125, 0.125])
print(f"Шеннон: {shannon(p):.4f}  ({shannon(p) / np.log(2):.2f} бит)")
print("Реньи  a=0.999:", round(renyi(p, 0.999), 4),
      " a=2:", round(renyi(p, 2), 4))
print("Тсаллис q=0.999:", round(tsallis(p, 0.999), 4),
      " q=2:", round(tsallis(p, 2), 4))
```

4 Реализация энтропий Шеннона, Реньи и Тсаллиса (продолжение)

Листинг 8.1.

```
a = np.array([0.7, 0.3])
b = np.array([0.6, 0.4])
ab = np.outer(a, b).ravel()
q = 2
print("Реньи: H(AB) - H(A) - H(B) =",
      round(renyi(ab, q) - renyi(a, q) - renyi(b, q), 6))
print("Тсаллис: S(AB) =", round(tsallis(ab, q), 4), " формула:",
      round(tsallis(a, q) + tsallis(b, q)
            + (1 - q) * tsallis(a, q) * tsallis(b, q), 4))
```

4 Результат: Реализация энтропий Шеннона, Реньи и Тсаллиса

```
Шеннон: 1.2130  (1.75 бит)
Реньи  a=0.999: 1.2132  a=2: 1.0678
Тсаллис q=0.999: 1.2139  q=2: 0.6562
Реньи: H(AB) - H(A) - H(B) = 0.0
Тсаллис: S(AB) = 0.6984  формула: 0.6984
```

5 Спектральная энтропия модельных сигналов

Листинг 8.2.

```
from scipy import signal

def spec_entropy(x, q=1):
    _, P = signal.periodogram(x - x.mean())
    P = P[1:] / P[1:].sum()
    return tsallis(P, q) if q != 1 else shannon(P) / np.log(P.size)

fs = 2048
t = np.arange(fs) / fs
rng = np.random.default_rng(1)
sig = {"Синусоида": np.sin(2 * np.pi * 50 * t),
       "Линейный chirp": signal.chirp(t, 20, 1, 300),
       "Белый шум": rng.normal(size=fs)}
for name, x in sig.items():
    print(f"{name:15} H = {spec_entropy(x):.3f}")
```

```
Синусоида       H = 0.000
Линейный chirp  H = 0.815
Белый шум       H = 0.938
```

6 Энтропия непрерывных величин и взаимная информация

- Для непрерывной случайной величины энтропия определяется интегралом:

$$h(X) = -\int p(x)\,\ln p(x)\,dx.$$

- Дифференциальная энтропия может быть отрицательной и зависит от масштаба переменной.
- Взаимная информация I(X; Y) = h(X) + h(Y) − h(X, Y) неотрицательна и равна нулю только при независимости величин.
- Для канала с аддитивным белым гауссовым шумом теорема Шеннона определяет пропускную способность:

$$C = B\,\log_2(1 + S/N).$$

6 Энтропия непрерывных величин и взаимная информация (продолжение)

- Здесь видна связь между отношением сигнал/шум и количеством передаваемой информации, являющаяся основанием для применения энтропийных характеристик к задачам определения отношения сигнал/шум.

7 Выбор порядка и настройка параметров

- Значения α или q выступают в роли настраиваемого параметра. При $\alpha \to 0$ энтропия Реньи стремится к ln числа ненулевых вероятностей, то есть носит структурный характер.
- Энтропия Реньи второго порядка связана с индексом концентрации Херфиндаля Σp_i^2; при частотно-временном анализе используется энтропия Реньи третьего порядка, поскольку распределение Вигнера–Вилля может иметь отрицательные значения, а нечётный порядок позволяет получить устойчивый результат для оценки сложности сигнала.
- В данных конечной длины значения энтропии имеют статистическую неопределённость.

7 Выбор порядка и настройка параметров (продолжение)

- Для определения порога принятия решения следует использовать реальные шумовые данные, поскольку аналитические распределения для окрашенного шума и глитчей точно неизвестны.

8 Энтропия и гравитационно-волновой анализ

- Несколько применений заслуживают особого внимания. Спектральная энтропия показывает, что мощность концентрируется в определённой полосе, поэтому может использоваться как простой индикатор присутствия сигнала.

9 Разбор примера

1. Для p = (0,5; 0,25; 0,125; 0,125) вычислим энтропию Шеннона: H = 0,5·1 + 0,25·2 + 2·0,125·3 = 1,75 бит, что соответствует 1,213 нат.
2. Для α = 2: Σp^2 = 0,25 + 0,0625 + 2·0,015625 = 0,34375.
3. Энтропия Реньи равна −ln 0,34375 = 1,068.
4. Энтропия Тсаллиса при q = 2 равна 1 − 0,34375 = 0,656.
5. Эти значения совпадают с результатом листинга 8.1.

10 Вопросы для обсуждения на занятии

Выбор порядка

Какой порядок энтропии Реньи целесообразно выбрать для обнаружения сильного узкополосного сигнала?

Нормировка

Почему некорректно сравнивать энтропии сегментов разной длины без нормировки?

Связь

В чём сходство и различие между энтропией и отношением сигнал/шум?

Контрольные вопросы

1. Дайте определение энтропии Шеннона и перечислите её свойства.
2. Что показывают взаимная информация и дивергенция Кульбака–Лейблера?
3. Запишите определения энтропий Реньи и Тсаллиса. Какой они дают предел?
4. Как порядок α влияет на вклад малых и больших вероятностей?
5. В чём заключается неаддитивность энтропии Тсаллиса?
6. Какие способы построения распределения вероятностей по сигналу существуют?
7. Что такое спектральная энтропия и как она различает узкополосный сигнал и белый шум?
8. Как объём выборки влияет на оценку энтропии?

Список литературы

1. Shannon C.E. A mathematical theory of communication // Bell System Technical Journal. – 1948. – Vol. 27. – P. 379–423, 623–656.

2. Rényi A. On measures of entropy and information // Proc. 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. – 1961. – Vol. 1. – P. 547–561.

3. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics // Journal of Statistical Physics. – 1988. – Vol. 52. – P. 479–487.

4. Cover T.M., Thomas J.A. Elements of Information Theory. – 2nd ed. – Hoboken: Wiley, 2006.

5. Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency // The Annals of Mathematical Statistics. – 1951. – Vol. 22, No. 1. – P. 79–86.

6. Powell G.E., Percival I.C. A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of Hamiltonian systems // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1979. – Vol. 12. – P. 2053–2071.